

BIBLIOTECA DI ARTIGLIERIA

VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

armadio

IX



Palchetto

Num.° d'ordine

10

21

NAZIONALE

B. Prov.

I

1130

NAPOLI

VITT. EM. III

R. BIBLIOTECA

~~*12-5-30*~~

12-5-30

B. P.

I

1130.

IX 261

a. 26

607317 SBN

ELEMENTI
DI
GEOMETRIA SOLIDA,
CON NOTE;

DEL SIGNOR

A. M. LEGENDRE

MEMBRO DELL' ISTITUTO E DELLA LEGIONE D' ONORE,
DELLA SOCIETA' REALE DI LONDRA, &c.

QUARTA EDIZIONE NAPOLITANA, FATTA SULLA DODICESIMA
FRANCESE; CORRETTA ED ACCRESCIUTE DI NOTE

DA

TOMMASO MANDOT

—————**DISCICIONE**—————

N A P O L I
DALLA TIPOGRAFIA DI RAFFAELLO DI NAPOLI
Strada S. Anna de' Lombardi n.° 6.

1850.

1873

N. B. *Le note dell'autore per maggior comodo si son riportate in fine della Trigonometria: le aggiunte da noi fatte alla presente edizione saranno contrassegnate con una crocetta (+).*

ELEMENTI DI GEOMETRIA SOLIDA.

LIBRO V.

DE' PIANI , E DEGLI ANGOLI SOLIDI.

DEFINIZIONI.

I. **U**NA linea retta è *perpendicolare ad un piano* allorchè essa è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo *pie*de nel piano (1). Reciprocamente il piano è perpendicolare alla linea.

Il *pie*de della perpendicolare è il punto dove questa linea incontra il piano.

II. Una linea è *parallela ad un piano* quando non può incontrarlo, a qualunque distanza si prolunghino l'uno e l'altra. Reciprocamente il piano è parallelo alla linea.

III. Due *piani* son *paralleli* fra loro quando non possono mai incontrarsi, a qualunque distanza si prolunghino l'uno e l'altro.

IV. Si dimostrerà (2) che l'intersezione comune di due piani che s'incontrano è una linea retta: posto ciò l'*angolo* o l'*inclinazione* scambievole di due piani è la quantità più o meno grande per cui sono discosti l'uno dall'altro; questa quantità (3) si misura dall'angolo che fanno fra loro due perpendicolari tirate in ciascuno di questi piani da un medesimo punto dell'intersezione comune.

Quest'angolo può essere acuto, retto od ottuso.

V. Se è retto, i due piani son *perpendicolari* fra loro.

VI. *Angolo solido* è lo spazio angolare compreso tra più piani che si riuniscono in un medesimo punto.

Così l'angolo solido S è formato dalla riunione degli angoli piani ASB, BSC, CSD, DSA (Fig. 499).

(1) 4. — (2) 3. — (3) 7.

Sono necessari almeno tre angoli piani per formare un angolo solido.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Una linea retta non può essere parte sopra un piano, e parte fuori di esso.

Poichè, secondo la definizione del piano, una linea retta che ha due punti comuni con un piano, è tutta intera nel piano.

Scolio. Per conoscere se una superficie è piana, bisogna applicare una linea retta in differenti direzioni su questa superficie, e vedere se la tocca in tutta la sua estensione.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Due linee rette che si tagliano sono in un medesimo piano, e ne determinano la posizione.

Sieno AB, AC (Fig. 181) due linee rette che si tagliano in A: si può concepire un piano dove si trova la linea retta AB: se in seguito si fa girare questo piano intorno ad AB finchè passi pel punto C, la linea AC che ha due dei suoi punti A e C in questo piano vi sarà tutta intera; dunque la posizione di questo piano è determinata dalla sola condizione di contenere le due rette AB, AC.

Corollario I. Un triangolo ABC, o tre punti A, B, C, non in linea retta, determinano la posizione d' un piano.

Corollario II. Dunque anche due parallele AB, CD, (Fig. 182.) determinano la posizione d' un piano; perchè se sarà quello delle parallele AB, CD.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se due piani si tagliano, la loro comune intersezione sarà una linea retta.

Poichè se tra i punti comuni ai due piani se ne trovassero tre che non fossero in linea retta, i due piani di cui si tratta, passando ciascuno per questi tre punti, non ne fa-

rebbero che un solo e medesimo piano (1); il che è contro la supposizione.

PROPOSIZIONE IV.

TOREMA.

Se una linea retta AP (Fig. 183) è perpendicolare a due altre PB, PC, che s'intersecano al suo piede nel piano MN, essa sarà perpendicolare a qualunque altra retta PQ condotta pel suo piede nel medesimo piano, e quindi essa sarà perpendicolare al piano MN.

Per un punto Q, preso ad arbitrio sopra PQ, tirisi la retta BC, nell'angolo BPC, di maniera che sia BQ=QC (2); si tirino AB, AQ, AC.

La base BC essendo divisa in due parti eguali nel punto Q, il triangolo BAC darà (3)

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AQ}^2 + 2\overline{QC}^2.$$

Il triangolo BPC darà parimente

$$\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PQ}^2 + 2\overline{QC}^2.$$

Togliendo questa seconda eguaglianza dalla prima, ed osservando che i triangoli APC, APB, ambedue rettangoli in P, danno $\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{AP}^2$, e $\overline{AB}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AP}^2$, si avrà

$$\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = 2\overline{AQ}^2 - 2\overline{PQ}^2.$$

Dunque, prendendo le metà da ambe le parti, si ha $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{PQ}^2$, ovvero $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2$; dunque il triangolo APQ è rettangolo in P (4); dunque AP è perpendicolare a PQ.

Scolio. Si vede da ciò, che non solamente è possibile che una linea retta sia perpendicolare a tutte quelle che passano pel suo piede in un piano, ma che ciò accade sempre che questa linea è perpendicolare a due sole rette condotte nel piano; il che dimostra la legittimità della definizione I.

Corollario I. La perpendicolare AP è più corta d'un obliqua qualunque AQ; essa dunque misura la vera distanza dal punto A al piano PQ.

(1) 2 (2) Prob. 5, 3. — (3) 14, 3. — (4) 13, 3.

Corollario II. Da un punto P dato sopra un piano non si può alzare che una sola perpendicolare a questo piano: perchè se si potessero alzare due perpendicolari dal medesimo punto P , si faccia passare per queste due perpendicolari un diano, la cui intersezione col piano NM sia PQ ; allora le due perpendicolari proposte, sarebbero perpendicolari alla linea PQ nel medesimo punto e nel medesimo piano, il che è impossibile.

È parimente impossibile d'abbassare da un punto dato fuori di un piano due perpendicolari, poichè sieno AP , AQ queste due perpendicolari; allora il triangolo APQ avrebbe due angoli retti APQ , AQP ; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Le oblique egualmente lontane dalla perpendicolare sono eguali; e di due oblique disugualmente lontane dalla perpendicolare quella che più si allontana è la maggiore.

Poichè essendo retti gli angoli APB , APC , APD (Fig. 184), se si suppongono le distanze PB , PC , PD , uguali fra loro, i triangoli APB , APC , APD , avranno un angolo uguale compreso fra lati uguali; dunque saranno uguali; onde le ipotenuse, o le oblique AB , AC , AD , saranno uguali fra loro. Parimente, se la distanza PE è maggior di PD , o della sua uguale PB , è chiaro che l'obliqua AE sarà maggiore di AB , o della sua uguale AD .

Corollario. Tutte le oblique uguali AB , AC , AD , ecc. terminano alla circonferenza BCD descritta dal piede P della perpendicolare come centro; dunque; essendo dato un punto A fuori d'un piano, se si vuol trovare su questo piano il punto P ove cadrebbe la perpendicolare abbassata da A , bisogna segnare su questo piano tre punti B , C , D , ugualmente lontani dal punto A , e cercare indi il centro del cerchio che passa per questi punti: questo centro sarà il punto cercato P .

Scolio. L'angolo ABP è ciò, che si chiama *l'inclinazione dell'obliqua AB sul piano MN* ; si vede che questa inclinazione è uguale per tutte le oblique AB , AC , AD , ecc., che si allontanano ugualmente dalla perpendicolare, perchè tutti i triangoli ABP , ACP , ADP , ec. sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

S'ia AP (Fig. 183) una perpendicolare al piano MN, e BC una linea posta in questo piano; se dal piede P della perpendicolare si abbassi PD perpendicolare sopra BC, e che si congiunga AD, dico che AD sarà perpendicolare a BC.

Prendasi $DB = DC$, e si congiungano PB, PC, AB, AC: poichè $DB = DC$, l'obliqua $PB = PC$: e per rapporto alla perpendicolare AP, poichè $PB = PC$, l'obliqua $AB = AC$ (1); dunque la linea AD ha due dei suoi punti A e D ugualmente distante dalle estremità B e C; dunque AD è perpendicolare sulla metà di BC.

Corollario. Si vede nel medesimo tempo che BC è perpendicolare al piano APD, poichè BC è perpendicolare nel tempo stesso alle due rette AD, PD (a).

Scolio. Le due linee AE, BC offrono l'esempio di due linee rette che non s'incontrano perchè non sono situate in un medesimo piano. La più corta distanza di queste linee è la retta PD, che è ad un tempo stesso perpendicolare alla linea AP ed alla linea BC. La distanza PD è la più corta fra queste due linee; poichè se si congiungano due altri punti, come A e B, avremo $AB > AD$, $AD > PD$; dunque con più ragione $AB > PD$.

Le due linee AE, CB, quantunque non situate in un medesimo piano, debbono fare tra loro un angolo retto, perchè AE e la parallela condotta per un dei suoi punti alla linea BC farebbero tra loro un angolo retto. Parimente la linea AB e la linea PD, che rappresentano due rette qualunque non poste nel medesimo piano, debbono far tra loro il medesimo angolo che farebbe con AB la parallela a PD condotta per uno dei punti di AB.

(1) 5.

(a) † Si vede ancora che l'angolo BAC è minore di BPC; infatti essendo AD ipotenusata del triangolo rettangolo APD sarà $AD > PD$. Quindi prolungata DP in Q finchè sia $DQ = DA$, si congiungano QC, QB. I due triangoli rettangoli ADC, QDC, avendo $AD = QD$, e DB comune, saranno eguali, e perciò sarà l'angolo CAD = CQD. Inoltre essendo l'angolo esterno CPD = CQP + PCQ (Coroll. VI. 19 4.) sarà il solo angolo CQP, ossia CQD < CPD: ma è l'angolo CQD = CAD, dunque sarà ancora CAD < CPD. Similmente si dimostra che BAD < BPD, e perciò sarà tutto l'angolo BAC < BPC.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se la linea AP (Fig. 186) è perpendicolare al piano MN ogni linea DE parallela ad AP sarà perpendicolare al medesimo piano.

Per le parallele AP, DE, tirasi un piano la cui intersezione col piano MN sarà PD; nel piano MN conducasi BC perpendicolare a PD, e congiungansi AD.

Secondo il corollario del teorema precedente, BC è perpendicolare al piano APDE; dunque l'angolo BDE è retto; ma l'angolo EDP è pure retto, poichè AP è perpendicolare a PD, e DE è parallela ad AP: dunque la linea DE è perpendicolare alle due rette DP, DB; essa dunque è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario I. Reciprocamente se le rette AP, DE son perpendicolari al medesimo piano MN, esse saranno parallele; poichè se non lo fossero, conducasi pel punto D una parallela ad AP, questa parallela sarà perpendicolare al piano MN; dunque si potrebbero da un medesimo punto D alzare due perpendicolari ad un medesimo piano, il che è impossibile (1).

Corollario II. Due linee A e B parallele ad una terza C son parallele fra di loro; poichè s'immagini un piano perpendicolare alla linea C; le linee A e B parallele a questa perpendicolare, saranno perpendicolari al medesimo piano; dunque, pel corollario precedente, esse saranno parallele fra loro.

Si suppone che le tre linee non siano in un medesimo piano, senza di che la proposizione sarebbe già nota (2).

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se la linea AB (Fig. 187) è parallela ad una retta CD condotta nel piano MN, essa sarà parallela a questo piano.

Poichè se la linea AC, che è nel piano ABCD, incontrasse il piano MN, ciò non potrebbe essere che in qualche punto della linea CD, intersezione comune dei due piani: ora AB non può incontrare CD poichè le è parallela, essa dunque non incontrerà neppure il piano MN; dunque sarà parallela a questo piano (3).

(1) 4. — (2) 25, 1. — (3) Def. 2.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Due piani MN, PQ (Fig. 188) perpendicolari ad una medesima retta AB son paralleli fra loro.

Poichè se s'incontrassero in qualche parte, sia O una dei loro punti comuni, e congiungansi OA, OB; la linea AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta OA condotta pel suo piede in questo piano; per la medesima ragione AB è perpendicolare a BO; dunque OA e OB sarebbero due perpendicolari abbassate dal medesimo punto O su la medesima linea retta; il che è impossibile: dunque i piani MN, PQ, non possono incontrarsi; dunque son paralleli.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Le intersezioni EF, GH (Fig. 189) di due piani paralleli MN, PQ, con un terzo piano FG son parallele.

Poichè se le linee EF, GH situate in uno stesso piano non son parallele, essendo prolungate s'incontreranno; dunque i piani MN, PQ ne' quali esse sono, s'incontrerebbero pure; dunque non sarebbero paralleli.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

La linea AB (Fig. 188) perpendicolare al piano MN, è perpendicolare al piano PQ parallelo ad MN.

Avendo tirata a piacere la linea BC nel piano PQ, per AB e BC conducasi un piano ABC, la cui intersezione col piano MN sia AD; l'intersezione AD sarà parallela a BC (1) ma la retta AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta AD, essa dunque sarà pure perpendicolare alla sua parallela BC, e poichè la linea AB è perpendicolare ad ogni retta BC condotta pel suo piede nel piano PQ, ne segue ch'essa è perpendicolare al piano PQ.

(1) 10.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

L^a parallele EG, FH (Fig. 189), comprese fra due piani paralleli MN, PQ sono uguali.

Per le parallele EG, EH facciasi passare il piano EGHF. che incontrerà i piani paralleli nelle EF e GH. Le intersezioni EF, GH son parallele tra loro (1) come pure EG, FH: dunque la figura EGHF è un parallelogrammo: dunque $EG = FH$.

Corollario. Segue da ciò, che due piani paralleli sono da per tutto ad egual distanza; poichè se GE ed FH sono perpendicolari ai due piani MN, PQ, esse saranno parallele fra loro (2) dunque saranno uguali.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se due angoli CAE, DBF (Fig. 190) non situati nello stesso piano, hanno i loro lati paralleli e diretti in un medesimo senso, questi angoli saranno eguali, e i loro piani saranno paralleli.

Prendasi $AC = BD$, $AE = BF$, e congiungansi CE, DF, AB, CD, EF. Poichè AC è uguale e parallela a BD, la figura ABDC è un parallelogrammo (3) dunque CD è uguale e parallela ad AB. Per una simil ragione EF è uguale e parallela ad AB; dunque ancora CD è uguale e parallela ad EF: la figura CEFD è dunque un parallelogrammo; e perciò il lato CE è uguale e parallelo a DF; dunque i triangoli CAE, DBF sono equilateri fra di loro; e perciò l'angolo $CAE = DBF$.

In secondo luogo dico che il piano ACE è parallelo al piano BDF: poichè supponiamo che il piano parallelo a BDF condotto pel punto A, incontri le linee EF, ~~ed~~ in punti diversi da C ed E, per esempio in G ed H; secondo la proposizione XII, le tre linee AB, ~~GH~~, FH saranno uguali: ma le altre AB, CD, EF, sono pure uguali; dunque si avrebbe $CD = GD$, ed $FH = EF$, il che è assurdo; dunque il piano ACE è parallelo a BDF.

Corollario. Se due piani paralleli MN, PQ sono incontrati da due altri piani CABD, EABF, gli angoli CAE, DBF, formati dalle intersezioni dei piani paralleli, saranno uguali;

(1) 10. — (2) 7. — (3) 30, 1.

perchè l' intersezione AC è parallela a BD , (1) AE lo è a BF ; dunque l' angolo CAE = DBF.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se tre rette AB, CD, EF, (Fig.190) non poste nel medesimo piano, sono uguali e parallele , i triangoli ACE, BDF, formati dall' una parte e dall' altra giungendo l' estremità di queste rette saranno uguali, e i loro piani saranno paralleli.

Poichè siccome AB è uguale e parallela a CD, la figura ABDC è un parallelogrammo ; dunque il lato AC è uguale, e parallelo a BD. Per la stessa ragione i lati AE, BF sono eguali e paralleli , come pure CE , DF; dunque i due triangoli ACE , BDF sono eguali : si proverà ancora , come nella proposizione precedente , che i loro piani son paralleli.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Due rette comprese fra tre piani paralleli sono tagliate in parti proporzionali.

Supponiamo che la linea AB (Fig. 191) incontri i piani paralleli MN , PQ , RS , in A , E , B , e che la linea CD incontri i medesimi piani in C , F , D; dico che si avrà AE : EB :: CF : FD.

Tirisi AD, che incontri il piano PQ in G, e congiungansi AC, EG, GF, BD: le intersezioni EG, BD , dei piani paralleli PQ, RS, col piano ABD , son parallele (2) ; dunque AE : EB :: AG : GD ; parimente , essendo parallele le intersezioni AC , GF , si ha AG : GD :: CF : FD ; dunque a cagione del rapporto comune AG : GD , si avrà AE : EB :: CF : FD.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

» Sia ABCD (Fig.192) un quadrilatero qualunque posto, o non posto in un medesimo piano, se si tagliano i lati » opposti proporzionalmente con due rette EF, GH, talmente-

(1) 10. — (2) 10.

» *ché si abbia* $AE : EB :: DF : FC$, e $BG : GC :: AH : HD$ dico che le rette EF , GH , si taglieranno in un punto
 » *M di maniera che si avrà* $HM : MG :: AE : EB$, ed $EM : MF :: AH : HD$.

» Conducasi per AD un piano qualunque $A\delta H\epsilon D$, che non passi per GH ; pei punti E , B , C , F , si tirino a GH le parallele Ee , Bb , Cc , Ff , che incontrino questo piano in e , b , c , f . A causa delle parallele Bb , GH , Cc (1), si avrà $\delta H : He :: BG : GC :: AH : HD$; dunque i triangoli AHb , DHe , sono simili (2). Si avrà di più $Ae : eb :: AE : EB$, e $Df : fc :: DF : FC$; dunque $Ae : eb :: Df : fc$, ovvero, *componendo*, $Ae : Df :: Ab : Dc$. Ma, a motivo dei triangoli simili AHb , DHe , si ha $Ab : Dc :: AH : HD$; dunque $Ae : Df :: AH : HD$; d'altronde i triangoli AHb , ϵHD essendo simili, l'angolo $HAc = HDf$; dunque i triangoli AHe , DHf sono simili (3); dunque l'angolo $AHe = DHf$. Ne segue in primo luogo che eHf è una linea retta, e che perciò le tre parallele Ee , GH , Ff , son poste in un medesimo piano, il quale conterrà le due rette EF , GH , dunque queste debbon tagliarsi in un punto M . Inoltre a cagione delle parallele Ee , MH , Ff , si avrà $EM : MF :: eH : Hf :: AH : HD$.

» Con una costruzione simile, rapportata al lato AB , si dimostrerebbe che $HM : MG :: AE : EB$.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

L'angolo compreso fra i due piani MAN , MAP , (Fig. 193) può esser misurato, conforme alla definizione, dall'angolo NAP che fanno fra loro le due perpendicolari AN , AO condotte in ciascuno di questi piani all'intersezione comune AM .

Per dimostrare la legittimità di questa misura, bisogna provare 1.^o ch'essa è costante, ossia che è sempre la medesima qualunque sia il punto dell'intersezione comune per lo quale si conducessero le due perpendicolari.

Infatti, se si prende un altro punto M , e si conducono MC nel piano MN , MB nel piano MP perpendicolari all'intersezione comune AM ; poichè MB , ed AP son perpendicolari ad una medesima retta AM , esse son parallele fra loro. Per la medesima ragione MC è parallela ad AN : dunque l'angolo

(1) 15, 3. — (2) 20, 5 — (3) 20, 3.

$BMC = PAN$ (1); dunque è indifferente il condurre le perpendicolari dal punto M o dal punto A ; l'angolo compreso sarà sempre lo stesso.

2.^o Bisogna provare che se l'angolo dei due piani aumenta o diminuisce in un certo rapporto, l'angolo PAN aumenterà o diminuirà nello stesso rapporto.

Nel piano PAN descrivasi col centro A e con un raggio qualunque l'arco NDP ; col centro M e con un raggio uguale descrivasi l'arco CEB ; tirisi AD comunque: i due piani PAN , BMC , essendo perpendicolari ad una medesima retta MA , saranno paralleli (2), dunque le intersezioni AD , ME di questi due piani con un terzo AMD saranno parallele; dunque l'angolo BME sarà eguale a PAD (3).

Chiamiamo per un momento *cuneo* l'angolo formato dai due piani PM , MN : posto ciò, se l'angolo DAP fosse uguale a DAN , è chiaro che il cuneo $DAMP$ sarebbe uguale al cuneo $DAMN$; perchè la base PAD si adatterebbe esattamente su la sua uguale DAN , l'altezza AM sarebbe sempre la stessa: dunque i due cunei coinciderebbero l'uno con l'altro. Si vede del pari che se l'angolo DAP fosse contenuto un certo numero esatto di volte nell'angolo PAN , il cuneo $DAMP$ sarebbe contenuto altrettante volte nel cuneo $PAMN$. D'altronde dal rapporto in numeri interi ad un rapporto qualunque la conclusione è legittima, ed è stata dimostrata tale in una circostanza interamente simile (4); e però, qualunque siasi il rapporto dell'angolo DAP all'angolo PAN , il cuneo $DAMP$ sarà in questo medesimo rapporto col cuneo $PAMN$; dunque l'angolo NAP può esser preso per la misura del cuneo $PAMN$, o dell'angolo che fanno fra loro i due piani MAP , MAN .

Scolio. Succede per gli angoli formati da due piani quello stesso che succede per gli angoli formati da due rette. Così allorchè due piani s'intersecano scambievolmente, gli angoli opposti al vertice sono uguali, e gli angoli adiacenti equivalgono insieme a due angoli retti; dunque, se un piano è perpendicolare ad un altro, questo ancora è perpendicolare al primo. Parimente nell'incontro dei piani paralleli con un terzo piano si avranno le medesime uguaglianze di angoli, e le medesime proprietà che nell'incontro di due parallele con una terza linea.

(1) 15. — (2) 9. — (3) 13. — (4) 17, 2.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se la linea AP (Fig. 194.) è perpendicolare al piano MN, ogni piano APB, condotto per AP, sarà ancora perpendicolare allo stesso piano MN.

Sia BC l'intersezione dei piani AB, MN; se nel piano MN si tiri DE perpendicolare a BP, la linea AP, essendo perpendicolare al piano MN, sarà perpendicolare a ciascuna delle due rette BC, DE: ma l'angolo APD, formato dalle due perpendicolari PA, PD, all'intersezione comune BP, misura l'angolo dei due piani AB, MN; dunque poichè quest'angolo è retto, i due piani son perpendicolari fra loro (1).

Scolio. Quando tre rette, come AP, BP, DP, son perpendicolari l'una all'altra, ciascuna di queste rette è perpendicolare al piano delle altre due, ed i tre piani son perpendicolari fra loro.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se il piano AB è perpendicolare al piano MN (Fig. 194.), e che nel piano AB si elevi la linea PA perpendicolare all'intersezione comune PB, dico che PA sarà perpendicolare al piano MN.

Poichè se nel piano MN si alzi PD perpendicolare a PB, l'angolo APD sarà retto, perchè i piani son tra loro perpendicolari: dunque la linea AP è perpendicolare alle due rette PB, PD; e perciò essa è perpendicolare al loro piano MN.

Corollario. Se il piano AB è perpendicolare al piano MN, e per un punto P dell'intersezione comune si elevi una perpendicolare al piano MN, dico che questa perpendicolare sarà nel piano AB; poichè, se non fosse tale, si potrebbe condurre nel piano AB una perpendicolare AP all'intersezione comune BP, la quale sarebbe nel medesimo tempo perpendicolare al piano MN; ed allora dal medesimo punto P si sarebbero alzate due perpendicolari al piano MN; il che è impossibile (2).

(1) Def. 5. — (2) 4.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Se due piani AB, AD (Fig. 194.) sono perpendicolari ad un terzo MN, la loro intersezione comune AP sarà perpendicolare a questo terzo piano.

Poichè se dal punto P si alzerà la perpendicolare al piano MN, questa perpendicolare dovrà trovarsi nel medesimo tempo nel piano AB e nel piano AD (1); essa dunque è la loro comune intersezione AP.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se un angolo solido sarà formato da tre angoli piani, la somma di due qualunque di questi angoli sarà maggiore del terzo.

Non v'è bisogno di dimostrar la proposizione se non quando l'angolo piano che si paragona con la somma degli altri due è maggiore di ciascuno di questi. Sia dunque l'angolo solido S (Fig. 195.) formato da tre angoli piani ASB, ASC, BSC, e suppongasi che l'angolo ASB sia il maggiore dei tre; dico che si avrà $ASB < ASC + BSC$.

Nel piano ASB si faccia l'angolo $BSD = BSC$: si tiri comunque la retta ADB; ed avendo preso $SC = SD$, si congiungano le rette AC, BC.

I due lati BS, SD sono uguali ai due BS, SC, l'angolo $BSD = BSC$; dunque i due triangoli BSD, BSC sono uguali; e perciò $BD = BC$. Ma si ha $AB < AC + BC$: togliendo dall'una parte BD, e dall'altra la sua eguale BC, resterà $AD < AC$. I due lati AS, SD sono uguali ai due AS, SC, il terzo AD è minore del terzo AC; dunque (2) l'angolo $ASD < ASC$. Aggiungendo $BSD = BSC$, si avrà $ASE + BSD$, ovvero $ASB < ASC + BSC$.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

La somma degli angoli piani che formano un angolo solido, è sempre minori di quattro angoli retti.

Si tagli l'angolo solido S (Fig. 196.) con un piano qua-

(1) Cor. 9. — (2) 10. 1.

lunque ABCDE; da un punto O prese in questo piano si conducano a tutti gli angoli le rette OA, OB, OC, OD, OE.

La somma degli angoli de' triangoli ASB, ASC, ecc., fatti intorno al vertice S, equivale alla somma degli angoli d' un egual numero di triangoli AOB, BOC, ecc. fatti intorno al vertice O. Ma al punto B gli angoli ABO, OBC presi insieme fanno l'angolo ABC minore della somma degli angoli ABS, SBC (1); similmente al punto C si ha $BCO + OCD < BCS + SCD$; e così rispetto a tutti gli angoli del poligono ABCDE. Segue da ciò che nei triangoli il cui vertice è in O, la somma degli angoli alla base è minore della somma degli angoli alla base dei triangoli il cui vertice è in S; dunque in compensazione, la somma degli angoli fatti intorno al punto O è maggiore della somma degli angoli intorno al punto S. Ma la somma degli angoli intorno al punto O è eguale a quattro angoli retti (2); dunque la somma degli angoli piani, che formano l'angolo solido S è minore di quattro angoli retti (a).

Scolio. Questa dimostrazione suppone che l'angolo solido sia convesso, ovvero che il piano d'una faccia prolungato non possa mai tagliare l'angolo solido, se fosse altrimenti, la somma degli angoli piani non avrebbe più limite, e potrebbe essere d'una grandezza qualunque.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Se due angoli solidi son composti di tre angoli piani rispettivamente uguali, i piani nei quali sono gli angoli uguali, saranno ugualmente inclinati fra loro.

Sia l'angolo $ASC = DTF$ (Fig. 197), l'angolo $ACB = DTE$

(1) 21. — (2) 5, 1. —

(a) † Ecco un'altra dimostrazione più breve, e più chiara di questo teorema.

Si tagli l'angolo solido S con un piano ABCDE, si abbassi dal vertice S su questo piano la perpendicolare SO, e si uniscano AO, BO, CO, DO, EO, ecc. Essendo per la Nota (a) della proposizione VI. l'angolo $ASB < AOB$, $BSC < BOC$, $CSD < COD$ ec. sarà la somma di tutti gli angoli piani che formano l'angolo solido S minore della somma di tutti gli angoli fatti intorno al punto O, ma la somma di questi è uguale a quattro retti, dunque la somma di tutti gli angoli piani che formano l'angolo solido S è minore di quattro angoli retti.

e l'angolo $BSC = ETF$; dico che i due piani ASC , ASB , avranno fra loro una inclinazione eguale a quella dei due piani DTF , DTE .

Si prenda SB ad arbitrio, si abbassi BO perpendicolare al piano ASC ; dal punto O , dove questa perpendicolare incontra il piano, si tirino OA , OC perpendicolari sopra SA , SC ; e si congiungano AB , BC ; si prenda in seguito $TE = SB$; si abbassi EP perpendicolare sul piano DTF ; dal punto P si abbassino PD , PF perpendicolari sopra TD , TF ; infine si congiungano DE , EF .

Il triangolo SAB è rettangolo in A , ed il triangolo TDE in D (1); e poichè l'angolo $ASB = DTE$, si ha pure $SBA = TED$. D'altronde $SB = TE$; dunque il triangolo SAB è uguale al triangolo TDE (2); dunque $SA = TD$, ed $AB = DE$. Si dimostrerà similmente che $SC = TF$, e $BC = EF$. Ciò posto, il quadrilatero $SAOC$ è uguale al quadrilatero $TDPF$; poichè adattando l'angolo ASC sul suo uguale DTF , a cagione di $SA = TD$, e di $SC = TF$, il punto A , cadrà in D , ed il punto C , in F . Nel medesimo tempo AO , perpendicolare ad SA , cadrà sopra DP perpendicolare a TD , e parimenti OC sopra PF ; dunque il punto O cadrà sul punto P , e si avrà $OA = DP$. Ma i triangoli AOB , DPE son rettangoli in O e P , l'ipotenusa $AB = DE$ ed il lato $AO = DP$; dunque questi triangoli sono uguali (3); onde l'angolo $OAB = PDE$. Ora l'angolo OAB , è l'inclinazione de' due piani ASB , ASC ; e l'angolo PDE è quella dei due piani DTE , DTF ; dunque queste due inclinazioni sono uguali fra loro.

Bisogna osservare intanto che l'angolo A del triangolo rettangolo OAB non è propriamente l'inclinazione dei due piani ASB , ASC , se non quando la perpendicolare BO cadrà per rapporto a SA dalla medesima parte di SC ; chè se cadesse dall'altra parte, l'angolo dei due piani sarebbe ottuso, ed unito all'angolo A del triangolo OAB farebbe due angoli retti. Ma nel medesimo caso l'angolo dei due piani TDE , TDF ; sarebbe parimente ottuso, ed aggiunto all'angolo D del triangolo DPE , farebbe due angoli retti; dunque, siccome l'angolo A sarebbe sempre uguale a D , si concluderebbe similmente che l'inclinazione dei due piani ASB , ASC è uguale a quella dei due piani TDE , TDF .

Scolio. Se due angoli solidi son composti di tre angoli piani uguali l'uno all'altro, e se nel tempo stesso gli angoli uguali o omologhi sono disposti della stessa maniera nei due

(1) 6. — (2) 5, 1. — (3) 18, 1.

angoli solidi, questi angoli solidi saranno uguali, e adattati l'uno su l'altro coincideranno. Infatti si è già veduto che il quadrilatero SAOC può essere adattato sul suo eguale TDPF; onde adattando SA sopra TD, SC cadrà sopra TE, e il punto O sul punto P. Ma, a cagione dell'uguaglianza dei triangoli AOB, DPE, la OB perpendicolare al piano ASC è uguale alla PE perpendicolare al piano TDF; inoltre queste perpendicolari son dirette nel medesimo senso; dunque il punto B cadrà sul punto E, la linea SB sopra TE, ed i due angoli solidi coincideranno esattamente l'uno con l'altro.

Questa coincidenza però non ha luogo se non quando gli angoli piani uguali sono *disposti della stessa maniera* nei due angoli solidi; poichè, se gli angoli piani uguali saran *disposti in un ordine inverso*, o, il che torna lo stesso, se le perpendicolari OB, PE, invece d'esser dirette nel medesimo senso per rapporto ai piani ASC, DTF, saran dirette in sensi contrari, sarà allora impossibile di far coincidere i due angoli solidi l'uno con l'altro. Non sarebbe però men vero, conforme al teorema, che i piani nei quali sono gli angoli uguali fossero ugualmente inclinati fra loro; talmente che i due angoli solidi sarebbero uguali in tutte le loro parti costituenti, senza però poter essere sovrapposti. Questa specie d'uguaglianza, che non è assoluta, o di sovrapposizione, merita d'esser distinta con una denominazione particolare; noi la chiameremo *uguaglianza per simmetria*.

Così i due angoli solidi proposti, i quali son composti da tre angoli uguali rispettivamente, ma disposti in ordine inverso, si chiameranno *angoli eguali per simmetria*, o semplicemente *angoli simmetrici*.

La medesima osservazione s'applica agli angoli solidi composti da più di tre angoli piani: così un angolo solido composto dagli angoli piani A, B, C, D, E, ed un altro angolo solido composto dai medesimi angoli in ordine inverso A, E, D, C, B, posson esser tali che i piani nei quali sono gli angoli uguali sieno ugualmente inclinati fra loro. Questi due angoli solidi, che sarebbero uguali senza che fosse possibile la loro sovrapposizione, si chiameranno *angoli uguali per simmetria o angoli solidi simmetrici*.

Nelle figure piane non vi è propriamente uguaglianza per simmetria, e tutte quelle che si volessero chiamar così sarebbero eguaglianze assolute o di sovrapposizione: la ragione si è che si può rovesciare una figura piana, e prendere differenzialmente il di sopra pel di sotto. Accade diversamente ne' solidi, ove la terza dimensione può esser presa in due sensi diversi.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA.

Dati i tre angoli piani che formano un angolo solido , trovare con una costruzione piana l'angolo che fanno tra loro due di questi piani.

Sia S (Fig. 198) l'angolo solido proposto , nel quale si conoscano i tre angoli piani ASB, ASC, BSC; si cerca l'angolo che fanno tra loro due di questi piani , per esempio i piani ASB, ASC.

Immaginiamo che sia fatta la stessa costruzione come nel teorema precedente; l'angolo OAB sarebbe l'angolo cercato. Si tratta dunque di trovare il medesimo angolo con una costruzione piana, ossia fatta sopra un piano.

A tale effetto si facciano sopra un piano gli angoli B'SA, ASC, B'SC, uguali agli angoli BSA, ASC, BSC; della figura solida; si prendano B'S, e B'S uguali ciascuna a BS della figura solida; dai punti B' e B'' si abbassino B'A e B''C perpendicolari sopra SA ed SC, che s'incontreranno in un punto O. Dal punto A come centro e col raggio AB' si descriva la semicirconferenza B'bE; dal punto O si alzi sopra B'E la perpendicolare Ob, che incontra la circonferenza in b; si congiunga Ab; l'angolo EAb sarà l'inclinazione cercata dei due piani ASC, ASB nell'angolo solido.

Tutto riducesi a far vedere che il triangolo AOOb della figura piana è uguale al triangolo AOB della figura solida. Ora i due triangoli B'SA, BSA, son rettangoli in A, gli angoli in S sono uguali; dunque gli angoli in B e B' son parimente uguali. Ma l'ipotenusa SB' è uguale all'ipotenusa SB: dunque questi triangoli sono uguali: e perciò SA della figura piana è uguale a SA della figura solida, ed anche AB', o la sua uguale Ab nella figura piana è uguale ad AB nella figura solida. Si dimostrerà similmente che SC è uguale nelle due figure; d'onde segue che il quadrilatero SAOC è uguale in ambedue le figure, e che perciò AO della figura piana è uguale ad AO della figura solida; dunque nell'una e nell'altra i triangoli rettangoli AOOb, AOB hanno l'ipotenusa uguale ed un lato uguale; dunque sono uguali, e perciò l'angolo EAb trovato con la costruzione piana, è uguale all'inclinazione dei due piani SAB, SAC, dell'angolo solido.

Quando il punto O cade fra A e B' nella figura piana, l'angolo EAb diventa ottuso, e misura sempre la vera incli-

nazione dei piani; ed è perciò che l'inclinazione richiesta, si è indicata con EAb , e non con OAb affinchè la medesima soluzione convenga a tutti i casi senza eccezione.

Scolio. Si può domandare se, prendendo ad arbitrio tre angoli piani, si potrà formare con questi tre angoli piani un angolo solido.

In primo bisogna che la somma dei tre angoli dati sia minore di quattro angoli retti senza che l'angolo solido non può esser formato (1): bisogna inoltre che dopo di aver preso due degli angoli ad arbitrio $B'SA$, ASC , il terzo CSB'' sia tale che la perpendicolare $B'C$ al lato SC incontri il diametro $B'E$ fra le sue estremità B' ed E . Così i limiti della grandezza dell'angolo CSB'' sono quelli che fanno terminar la perpendicolare $B'C$ ai punti B' ed E . Da questi punti si abbassino sopra SC le perpendicolari $B'I$, EK , che incontrino in I e K la circonferenza descritta col raggio SB'' ; ed i limiti dell'angolo CSB'' saranno CSI , e CSK .

Ma nel triangolo isoscele $B'SI$ la linea CS prolungata essendo perpendicolare alla base $B'I$, si ha l'angolo $CSI = CSB' = ASC + AS'B$. E nel triangolo isoscele ESK , essendo la linea SC perpendicolare ad EK , si ha l'angolo $CSK = CSE$. D'altronde, a cagione dei triangoli uguali ASE , ASB' , l'angolo $ASE = ASB'$: dunque CSE ovvero $CSK = ASC - ASB'$.

Risulta da ciò che il problema sarà possibile ogni volta che il terzo angolo CSB'' sarà minore della somma degli altri due ASC , ASB' e maggiore della lor differenza; condizione, che si accorda col teorema XXI ; poichè in virtù di un tal teorema, bisogna che si abbia $CSB'' < ASC + ASB'$; bisogna pure che sia $ASC < CSB'' + ASB'$, ossia $CSB'' > ASC - ASB'$.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

Dati due de' tre angoli piani che formano un angolo solido, con l'angolo che i loro piani fanno tra loro, trovare il terzo angolo piano.

Sieno ASC , ASB' (Fig. 498) i due angoli piani dati, e supponiamo per un momento che CSB'' sia il terzo angolo che si cerca; facendo la medesima costruzione, del problema precedente, l'angolo compreso tra i piani dei due primi sarebbe EAb . Ora, nello stesso modo che si determina l'angolo

(1) 22.

$EA\delta$ per mezzo di CSB'' , essendo dati gli altri due; del pari si può determinare CSB'' per mezzo di $EA\delta$; ciò che risolverà il problema proposto.

Si prende SB' ad arbitrio, si abbassi sopra SA la perpendicolare indefinita BE ; si faccia l'angolo $EA\delta$ uguale all'angolo dei due piani dati; dal punto δ , ove il lato Ab incontra la circonferenza descritta col centro A e col raggio AB' si abbassi sopra AE la perpendicolare bO , e dal punto O si abbassi sopra SC la perpendicolare indefinita OCB'' , che si terminerà in B'' di modo che $SB' = SB''$: l'angolo CSB'' sarà il terzo angolo piano cercato.

Perchè, se si formerà un angolo solido co'tre angoli piani $B'SA$, ASC , CSB'' , l'inclinazione dei piani ove sono gli angoli dati ASB' , ASC , sarà uguale all'angolo dato $EA\delta$.

Scolio. Se un angolo solido sarà *quadruplo*, o formato da quattro angoli piani ASB , BSC , CSD , DSA (Fig. 199) la conoscenza di questi angoli non basta per determinare le inclinazioni scambievoli de' loro piani, poichè co'medesimi angoli piani si potrebbero formare un'infinità d'angoli solidi. Ma se si aggiunga una condizione, per esempio, se sia data l'inclinazione de' due piani ASB , BSC , in tal caso l'angolo solido è interamente determinato, e si potrà trovare l'inclinazione di due qualunque de' suoi piani. Infatti immaginate un angolo solido *triplo* formato dagli angoli piani ASB , BSC , ASC ; i due primi angoli sono dati, come pure l'inclinazione de' loro piani, si potrà dunque determinare mediante il problema che si è or ora risoluto, il terzo angolo ASC . Dipoi se si considera l'angolo solido triplo formato dagli angoli piani ASC , ASD , DSC , questi tre angoli sono cogniti, donde l'angolo solido è interamente determinato. Ma l'angolo solido *quadruplo* è formato dalla riunione de' due angoli solidi tripli di cui parliamo, dunque, poichè questi angoli parziali son noti e determinati, l'angolo totale sarà parimente noto e determinato.

L'angolo dei due piani ASD , DSC , si troverebbe immediatamente per mezzo del secondo angolo solido parziale. E quanto all'angolo de' due piani BSC , CSD , bisognerebbe in un angolo solido parziale cercar l'angolo compreso fra i due piani ASC , DSC , e nell'altro l'angolo compreso fra i due piani ASC , BSC ; la somma di questi due angoli sarebbe l'angolo compreso tra i piani BSC , DSC .

Si troverà nella stessa maniera che, per determinare un angolo solido *quintuplo*, bisogna conoscere, oltre a' cinque piani che lo compongono, due delle inclinazioni scambievoli

de' loro piani; ne bisognerebbero tre per l'angolo solido sc-
stuplo; e così in appresso.

LIBRO VI.

DE' POLIEDRI.

DEFINIZIONI.

1. **S**i chiama *solido poliedro*, o semplicemente *poliedro* ogni solido terminato da piani o facce piane. (Questi piani stessi sono necessariamente terminati da linee rette) Si chiama in particolare *tetraedro* il solido che a quattro facce; *essaedro* quello che ne ha sei, *ottaedro* quello che ne ha otto, *dodecaedro* quello che ne ha dodici, *icosaedro* quello che ne ha venti, ecc.

Il tetraedro è il poliedro più semplice, perchè bisogna almeno tre piani per formare un angolo solido, e questi tre piani lasciano un vuoto che, per esser chiuso, richiede almeno un quarto piano.

II. L'intersezione comune di due faccie adiacenti d'un poliedro si chiama *lato* o *costola* del poliedro.

III. Si chiama *poliedro regolare* quello di cui tutte le facce son poligoni regolari uguali, e di cui tutti gli angoli solidi son uguali fra loro. Questi poliedri sono in numero di cinque. Veggasi l'appendice ai libri VI. e VII.

IV. Il *prisma* è un solido compreso da più piani parallelogrammi, terminati dall'una parte e dall'altra da due piani poligoni eguali e paralleli.

Per costruire questo solido, sia ABCDE (Fig. 200) mi poligono qualunque; se in un piano parallelo ad ABC si condurranno le linee FG, GH, HI, ecc. eguali e parallele ai lati AB, BC, CD, ecc. si formerà con queste il poligono FGHIK eguale ad AECDE; se poscia si uniranno i vertici degli angoli omologhi ne' due piani con le rette AF, BG, CH, ecc., le facce ABGF, BCHG, ecc. saranno parallelogrammi, ed il solido così formato ABCDEFGHIK sarà un prisma.

V. I poligoni uguali e paralleli ABCDE; FGHIK si chiamano le *basi del prisma*; gli altri piani parallelogrammi presi insieme costituiscono ciò che si chiama la *superficie laterale*

o *convessa del prisma*. Le rette eguali AF , BG , CH , ecc. si chiamano i *lati del prisma*.

vi. L'*altezza d'un prisma* è la distanza delle due basi, o la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

vii. Un *prisma è retto* quando i suoi lati AF , BG , ecc. son perpendicolari a' piani delle basi; allora ciascuno di questi lati è uguale all' altezza del prisma. In ogni altro caso il prisma è *obbliguo*, e l' altezza è minore del lato.

viii. Un prisma è *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagono*, *esagono* ecc. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono, ecc.

ix. Il prisma. (Fig. 206) che ha per base un parallelogrammo, ha tutte le facce parallelogramme, e si chiama *parallelepipedo*.

Il *parallelepipedo è rettangolo* allorchè tutte le sue facce sono rettangoli.

x. Tra i parallelepipedi rettangoli si distingue il *cubo* o *esaedro regolare* composto da sei quadrati uguali.

xi. La *piramide* è il solido formato da più piani triangolari i quali partono da un medesimo punto S (Fig. 196), e vanno a terminare ai differenti lati d'un medesimo piano poligono $ABCDE$.

Il poligono $ABCDE$ si chiama la *base* della piramide; il punto S u'è il *vertice*, e il complesso de' triangoli ASB , BSC , ecc. forma la *superficie convessa o laterale* della piramide.

xii. L'*altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base, prolungata se occorre.)

xiii. La piramide è *triangolare*, *quadrangolare*, ecc. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, ecc.

xiv. Una piramide è *regolare* quando la base è un poligono regolare, e che nel tempo stesso la perpendicolare abbassata dal vertice sul piano della base, passa pel centro di essa base: questa linea si chiama allora l'*asse* della piramide.

xv. *Diagonale* d'un poliedro è la retta che unisce i vertici di due angoli solidi non adiacenti.

xvi. Chiameremo *poliedri simmetrici* due poliedri i quali, avendo una base comune, sono costrutti similmente, uno al di sopra del piano di questa base, l' altro al di sotto, con questa condizione che i vertici degli angoli solidi omologhi sieno situati ad eguali distanza dal piano della base sopra una medesima retta perpendicolare a questo piano.

Per esempio, se la retta ST (Fig. 202) è perpendicolare al piano ABC , e se nel punto O , dove essa incontra questo

piano, sia divisa in due parti eguali, le due piramidi $SABC$, $TABC$, che hanno le base comune ABC , saranno due poliedri simmetrici.

xvii. Due *piramidi triangolari* sono simili quando hanno due facce simili l'una all'altra, similmente disposte ed egualmente inclinate fra loro.

Così, supponendo gli angoli $ABC = DEF$ (Fig. 203). $BAC = EDF$, $ABS = DET$, $BAS = EDT$, se inoltre l'inclinazione dei piani ABS , ABC è uguale a quella dei loro omologhi DET , DEF , le piramidi $SABC$, $TDEF$ saranno simili.

xviii. Avendo formato un triangolo unendo i vertici di tre angoli presi sopra una medesima faccia o base d'un poliedro, si può immaginare che i vertici de' differenti angoli solidi del poliedro posti fuori del piano di questa base, sieno quelli d'altrettante piramidi triangolari che hanno per base comune il triangolo indicato, e ciascuna di queste piramidi determinerà la posizione di ciascun angolo solido del poliedro per rapporto alla base. Ciò posto:

Due *poliedri* sono simili quando, avendo basi simili, i vertici degli angoli solidi omologhi fuori di queste basi sono determinati dalle piramidi triangolari simili ciascuna a ciascuna.

xix. Chiameremo *vertici* d'un poliedro i punti posti a vertici de' suoi differenti angoli solidi.

N. B. Tutti i poliedri che noi consideriamo sono poliedri ad angoli salienti, o poliedri convessi. Chiamiamo così quello la cui superficie non può esser incontrata da una linea retta in più di due punti. In questa specie di poliedri il piano d'una faccia prolungata non può tagliare il solido; è dunque impossibile che il poliedro sia in parte al di sopra del piano d'una faccia, e in parte al di sotto, esso è tutto intero da una medesima parte d'un tal piano.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Due poliedri non possono avere i medesimi vertici e nel medesimo numero senza coincidere l'uno coll'altro.

Poichè supponiamo uno dei poliedri già costruito, se vuol costruirsi un altro che abbia i medesimi vertici e nel medesimo numero, bisognerà che i piani di quest'ultimo non passino tutti per i medesimi punti per cui passano i piani del primo, senza di che non differirebbero l'uno dall'altro: ma allora è chiaro che alcuni dei nuovi piani taglierebbe il primo poliedro;

vi sarebbero vertici al di sopra di questi piani, e vertici al di sotto; il che non può convenire a un poliedro convesso: dunque se due poliedri hanno i medesimi vertici, e nel medesimo numero essi debbono necessariamente coincidere l'uno con l'altro.

Scolio. Essendo dati di posizione i punti A, B, C, K, ecc. (Fig. 204), che debbon servire di vertici a un poliedro, è facile descrivere il poliedro.

Scelgansi prima tre punti vicini D, E, H tali che il piano DEH passi, se ciò ha luogo, per i nuovi punti K, C, ma lasci tutti gli altri da una medesima parte, cioè tutti al di sopra del piano, o tutti al di sotto: il piano DEH, o DEHKC, così determinato, sarà una faccia del solido. Per uno de' suoi lati EH conducasi un piano che si farà girare finchè incontri un nuovo vertice F, o più insieme F, I; si avrà una seconda faccia che sarà FEH o FEHI. Si continua così facendo passare i piani per i lati trovati finchè il solido sia terminato da tutte le parti; questo solido sarà il poliedro richiesto, perchè due poliedri non possono avere i medesimi vertici.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

In due poliedri simmetrici le facce omologhe sono rispettivamente uguali, e l'inclinazione di due facce adiacenti in uno di questi solidi, è uguale all'inclinazione delle facce omologhe nell'altro.

Sia ABCDE (Fig. 205) la base comune ai due poliedri, sieno M ed N i vertici di due qualunque angoli solidi d'uno dei poliedri, M' ed N' i vertici omologhi dell'altro poliedro; bisognerà, secondo la definizione, che le rette MN', NN' sieno perpendicolari al piano ABC, e che sieno divise in due parti uguali nei punti m ed n ove incontrano questo piano. Ciò posto, dico che la distanza MN è uguale ad M'N'.

Poichè se si fa girare il trapezio mM'N'n intorno ad mn finchè il suo piano si applichi sul piano mMNa; a cagione degli angoli retti in m ed in n, il lato mM' cadrà sul suo uguale mM, ed nN' sopra nN; dunque i due trapezi coincideranno, e si avrà $MN = M'N'$.

Sia P un terzo vertice del poliedro superiore, e P' il suo omologo nell'altro; si avrà pure $MP = M'P'$, ed $NP = N'P'$; dunque il triangolo MNP, che unisce tra vertici qualunque del poliedro superiore, è uguale al triangolo M'N'P', che unisce i tre vertici omologhi dell'altro poliedro.

Se tra questi triangoli si consideran soltanto quelli che sono formati alla superficie dei poliedri, si può già concludere che le superficie dei due poliedri son composte d'un medesimo numero di triangoli rispettivamente uguali.

Dico ora, che se alcuni di questi triangoli sono in un medesimo piano sopra una superficie, e formano una medesima faccia poligona, i triangoli omologhi saranno in un medesimo piano sopra l'altra superficie, e formeranno una faccia poligona uguale.

Infatti sieno MPN , NPQ due triangoli adiacenti, che si suppongono in uno stesso piano; e sieno $M'P'N'$, $N'P'Q'$ i loro omologhi. Si ha l'angolo $MNP = M'N'P'$, l'angolo $PNQ = P'N'Q'$; e se si tirano MQ ed $M'Q'$, il triangolo MNQ sarà uguale ad $M'N'Q'$; perciò si avrà l'angolo $MNQ = M'N'Q'$. Ma poichè $MPNQ$ forma un solo piano, si ha l'angolo $MNQ = MNP + PNQ$; dunque si avrà pure $M'N'Q' = M'N'P' + P'N'Q'$. Ora, se i tre piani $M'N'P'$, $P'N'Q'$, $M'N'Q'$ non fossero confusi in un solo, questi tre piani formerebbero un angolo solido, e si avrebbe (1) l'angolo $M'N'A' < M'N'P' + P'N'Q'$; dunque, poichè questa condizione non ha luogo, i due triangoli $M'N'P'$, $P'N'Q'$ sono in un medesimo piano.

Segue da ciò che ciascuna faccia, o triangolare, o poligona d'un poliedro corrisponde ad una faccia uguale nell'altro, e che perciò i due poliedri son compresi da un medesimo numero di piani rispettivamente uguali.

Resta a provare che l'inclinazione di due facce adiacenti qualunque in uno dei poliedri è uguale all'inclinazione delle due facce omologhe nell'altro.

Sieno MPN , NPQ , due triangoli formati sulla costola comune NP nei piani di due facce adiacenti; sieno $M'P'N'$, $N'P'Q'$, i loro omologhi: si può concepire in N un angolo solido formato dai tre angoli piani MNQ , MNP , PNQ , ed in N' un angolo solido formato dai tre $M'N'Q'$, $M'N'P'$, $P'N'Q'$. Ora abbiain già dimostrato che questi angoli piani son rispettivamente uguali; dunque l'inclinazione dei due piani MNP , PNQ , è uguale a quella dei loro omologhi $M'N'P'$, $P'N'Q'$ (2).

Dunque nei poliedri simmetrici le facce son rispettivamente uguali, e i piani di due facce qualunque adiacenti in uno dei solidi, hanno tra loro la medesima inclinazione che i piani di due facce omologhe nell'altro solido.

Scolio. È da osservarsi che gli angoli solidi di un poliedro sono i simmetrici degli angoli solidi dell'altro poliedro:

(1) 20, 5. — (2) 22, 5.

poichè se l'angolo solido N è formato dai piani MNP , PNQ , QNR , ecc., il suo omologo N' è formato dai piani $M'N'P'$, $P'N'Q'$, $Q'N'R'$, ecc. Questi sembrano disposti nel medesimo ordine degli altri; ma siccome i due angoli solidi sono in una situazione inversa l'uno per rapporto all'altro, ne segue che la disposizione reale dei piani che formano l'angolo solido N' è l'inversa di quella che ha luogo nell'angolo omologo N . D'altronde le inclinazioni dei piani consecutivi sono uguali nell'uno, e nell'altro angolo solido; dunque questi angoli solidi son simmetrici l'uno coll'altro. *Vedete lo scolio della proposizione XXIII. del lib. V.*

Quest'osservazione prova che un poliedro qualunque non può avere che un solo poliedro simmetrico. Poichè, se si costruisce sopra un'altra base un nuovo poliedro simmetrico al poliedro dato, gli angoli solidi di quest'ultimo sarebbero sempre simmetrici cogli angoli del poliedro dato; dunque sarebbero uguali a quelli del poliedro simmetrico costruito sulla prima base. D'altronde le facce omologhe sarebbero sempre uguali; dunque questi due poliedri simmetrici costrutti sopra una base, o sopra un'altra avrebbero le facce uguali, e gli angoli solidi uguali, essi dunque coinciderebbero mediante la sovrapposizione, e non formerebbero che un solo e medesimo poliedro.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se due prismi hanno un angolo solido compreso fra tre piani rispettivamente uguali, e similmente disposti essi saranno eguali.

Sia la base $ABCDE$ (Fig. 200) uguale alla base $abcde$, il parallelogrammo $ABGF$ uguale al parallelogrammo $abgf$, ed il parallelogrammo $BCHG$ uguale al parallelogrammo $bchg$; dico che il prisma $ABCI$ sarà uguale al prisma $abci$.

Poichè, se sia situata la base $ABCDE$ sulla sua uguale $abcde$, queste due basi coincideranno, ma i tre angoli piani, che formano l'angolo solido B , sono rispettivamente uguali ai tre angoli piani, che formano l'angolo solido b ; cioè, $ABC = abc$, $ABG = abg$, e $GBC = gbc$, di più questi angoli son similmente disposti, dunque gli angoli solidi B e b sono uguali e per conseguenza il lato BG cadrà sul suo uguale bg . Si vede pure che, a cagione dei parallelogrammi uguali $ABGF$, $abgf$, il lato GF cadrà sul suo uguale gf , e similmente GH sopra gh ; dunque la ba-

se superiore $FGHIK$ coinciderà interamente colla sua uguale $fg hik$, ed i due solidi saranno confusi in un solo, poichè avranno i medesimi vertici (1).

Corollario. Due prismi retti e che hanno basi eguali, ed altezze eguali, sono eguali. Perchè avendo il lato AB eguale ad ab , e l'altezza BG eguale a bg , il rettangolo $ABGF$ sarà eguale al rettangolo $abgf$; sarà lo stesso dei rettangoli $AGHC$, $bg hc$; onde i tre piani che formano l'angolo solido B sono uguali a tre che formano l'angolo solido b . Dunque i due prismi sono eguali.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

In ogni parallelepipedo i piani opposti sono uguali e paralleli.

Poichè, secondo la definizione di questo solido, le basi $ABCD$, $EFGH$ (Fig. 206) son parallelogrammi uguali, e i loro lati son paralleli; resta dunque a dimostrare che la medesima cosa ha luogo per due facce laterali opposte, come $AEHD$, $BFGC$. Ora AD è uguale e parallela a BC , poichè la figura $ABCD$ è un parallelogrammo; per una similitudine AE è uguale a parallela a BF : dunque l'angolo DAE è uguale all'angolo CBF (2), ed il piano DAE parallelo a CBF ; dunque anche il parallelogrammo $DAEH$ è uguale al parallelogrammo $CBFG$. Si dimostrerà del pari che i parallelogrammi $ABFE$, $DCGH$, sono uguali e paralleli.

Corollario. Poichè il parallelepipedo è un solido compreso da sei piani, di cui gli opposti sono uguali e paralleli, ne segue che una faccia qualunque e la sua opposta possono esser prese per le basi del parallelepipedo.

Scolio. Essendo date tre rette AB , AE , BD , che passino per un medesimo punto B , e facciano fra loro angoli dati, si può su queste tre rette costruire un parallelepipedo: a tal effetto bisogna condurre per l'estremità di ciascuna retta un piano parallelo al piano delle altre due, cioè pel punto B un piano parallelo a DAE , pel punto D un piano parallelo a BAE , e pel punto E un piano parallelo a BAD . Gli incontri scambievoli di questi piani formeranno il parallelepipedo cercato.

(1) 1. — (2) 15, 15.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

In ogni parallelepipedo gli angoli solidi opposti son simmetrici l'uno dall'altro, e le diagonali condotte dai vertici di questi angoli solidi si tagliano scambievolmente in due parti uguali.

Paragoniamo, per esempio, l'angolo solido A al suo opposto G (Fig. 206): l'angolo EAB, uguale ad EFB, è pure uguale ad HGC, l'angolo DAE = DHE = CGF, l'angolo DAB = DCB = HGF; dunque i tre angoli piani, che formano l'angolo solido A sono rispettivamente uguali ai tre che formano l'angolo solido G; d'altronde è facil vedere che la loro disposizione è differente nell'uno e nell'altro; dunque 1.° i due angoli solidi A e G sono simmetrici l'uno dell'altro (1).

In secondo luogo immaginiamo due diagonati EC, AG condotte entrambe dai vertici opposti; poichè AE è uguale e parallela a CG, la figura AEGC è un parallelogrammo: dunque le diagonali EC, AG si taglieranno scambievolmente in due parti uguali. Si dimostrerà parimente che la diagonale EC ed un'altra DF si taglieranno pure in due parti uguali: dunque 1.° le quattro diagonali si taglieranno scambievolmente in due parti uguali nel medesimo punto, che si può riguardare come il centro del parallelepipedo.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Il piano BDHE (Fig. 207), che passa per due lati paralleli opposti BF, DH, divide il parallelepipedo AG in due prismi triangolari ABDHEF, GHFBCD simmetrici l'uno dall'altro.

In primo luogo questi due solidi sono prismi, perchè i triangoli ABD, EFH, avendo i loro lati uguali e paralleli, sono uguali, e nel tempo stesso le facce laterali ABFE, ADHE, BDHF sono parallelogrammi; dunque il solido ABDHEF è un prisma: lo stesso è del solido GHFBCD. Dico adesso che questi due prismi sono simmetrici l'uno dell'altro.

Sulla base ABD si faccia il prisma ABDE'F'H', che sia il simmetrico del prisma ABDHEF. Secondo ciò ch'è stato già dimostrato (2), il piano ABF'E' è uguale ad ABFE, ed il pia-

(1) 25, 5. — (2) 2.

no $ADH'E'$ è uguale ad $ADHE$: ma se si paragona il prisma $GHFBCD$ al prisma $ABDH'E'F'$, la base GHF è uguale ad ABD , il parallelogrammo $GHDC$, che è uguale ad $ABFE$, è pure uguale ad $ABF'E'$; ed il parallelogrammo $GFBC$, che è uguale ad $ADHE$, è uguale ancora ad $ADH'E'$: dunque i tre piani che formano l'angolo solido G nel prisma $GHFBCD$, soni rispettivamente uguali ai tre piani che formano l'angolo solido A nel prisma $ABDH'E'F'$: essi d'altronde sono disposti similmente, dunque questi due prismi sono uguali (1), e potrebbero essere sovrapposti. Ma uno di essi $ABDH'E'F'$ è simmetrico del prisma $ABDHEF$; dunque l'altro $GHFBCE$ è pure simmetrico di $ABDHEF$.

PROPOSIZIONE VII.

LEMMA.

In qualunque prisma $ABCI$ (Fig. 201) le sezioni $NOPQR$ $STVXY$, fatte dai piani paralleli, sono poligoni eguali.

Poichè i lati NO , ST , sono paralleli, perchè sono le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano $ABGF$; e questi medesimi lati NO , ST , sono compresi tra le parallele NS , OT , che sono lati del prisma, dunque NO è uguale a ST . Per una simil ragione, i lati PO , PQ , QR , ecc. della sezione $NOPQR$ sono rispettivamente eguali ai lati TV , VX , YX , ecc. della sezione $STVXY$. D'altronde i lati eguali essendo nel medesimo tempo paralleli, ne segue che gli angoli NOP , OPQ , ecc. della prima sezione sono rispettivamente eguali agli angoli STV , TVX , ecc. della seconda. Dunque le due sezioni $NOPQR$, $STVXY$, sono poligoni eguali.

Corollario. Ogni sezione fatta in un prisma parallelamente alla sua base, è uguale a questa base.

PROPOSIZIONE VIII.

TROREMA.

I due prismi triangolari simmetrici $ABDHEF$, $BCDFGH$, (Fig. 208), nei quali si decompone il parallelepipedo AG , sona equivalenti tra loro.

Per i vertici B ed F si tirino perpendicolarmente al lato BF , i piani $Ba\delta c$, $Fehg$, che incontreranno da una parte in

(1) 3.

a , b , c , e dall'altra in e , h , g , i tre lati AE , DE , CG , dello stesso parallelepipedo; le sezioni $Bade$, $Fehy$ saranno parallelogrammi eguali. Queste sezioni sono eguali perchè sono fatte da due piani perpendicolari ad una medesima retta, per conseguenza paralleli (1): desse sono parallelogrammi perchè due lati opposti d'una medesima sezione aB , de , son le intersezioni de' due piani paralleli $ABFE$, $DCGH$, fatte da un medesimo piano.

Per una simil ragione la figura $BaeF$ è un parallelogrammo, come pure le altre facce laterali $BFgc$, $gchd$, $adhe$ del solido $BadcFehg$: dunque questo solido è un prisma (2), e questo prisma è retto poichè il lato BF è perpendicolare al piano della base.

Ciò posto, se col piano $BFHD$ si divida il prisma retto Bh in due prismi triangolari retti $aBdeFh$, $BdcFhg$, dico che il prisma triangolare obliquo $ABDEFH$ sarà equivalente al prisma triangolare retto $aBdeFh$.

Infatti questi due prismi avendo una parte comune $ABDheF$ basterà provare che le parti rimanenti, cioè i solidi $BaADD$, $FeEHh$ sono equivalenti tra loro.

Ora, a cagione dei parallelogrammi $ABFE$, $aBFe$, i lati AE , ae , eguali al lor parallelo BF , sono eguali tra loro; perciò, togliendone la parte comune Ae , resterà $Aa = Ee$. Proverebbesi parimente che $Dd = Hh$.

Intanto, per eseguir la sovrapposizione dei due solidi $BaADD$, $FeEHh$, mettiamo la base Feh sopra la sua eguale Bad ; allora il punto e cadendo in a ed il punto h in d , i lati eE , hH cadranno sopra i loro eguali aA , dD , poichè dessi son perpendicolari al medesimo piano Bad . Dunque i due solidi di cui si tratta, coincideranno interamente l'uno con l'altro; dunque il prisma obliquo $BADFEH$ è equivalente al prisma retto $BadFeh$.

Si dimostrerà similmente che il prisma obliquo $BDCFHG$ è equivalente al prisma retto $BdcFhg$. Ma i due prismi retti $BadFeh$, $BdcFhg$ son eguali tra loro, poichè hanno la medesima altezza BF , e le loro basi Bad , Bdc sono metà d'un medesimo parallelogrammo (3). Dunque i due prismi triangolari $BADFEH$, $BDCFHG$, equivalenti a dei prismi eguali, sono equivalenti tra loro.

Corollario. Ogni prisma triangolare $ABDHEF$, è la metà del parallelepipedo AC , costruito sul medesimo angolo solido A con i medesimi spigoli AB , AD , AE .

(1) 7. — (2) Def. 4. — (3) 5, cor.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se due parallelepipedi AG, AL (Fig. 209), hanno la base comune ABCD, e che le loro basi superiori EFGH, IKLM siano comprese in un medesimo piano e tra le medesime parallele EK, KL, questi due parallelepipedi saranno equivalenti fra loro.

Possono accadere tre casi, secondochè EI è maggiore, o minore, o eguale ad EF, ma la dimostrazione è la stessa per tutti: e in primo luogo dico che il prisma triangolare AEIDHM è uguale al prisma triangolare BFKCGL.

Infatti, poichè AE è parallela a BF ed HE a GF, l'angolo $AEI = BFK$, $HEI = GFK$, ed $HEA = GFB$. Di questi sei angoli i primi tre formano l'angolo solido E, gli altri tre formano l'angolo solido F; dunque, poichè gli angoli piani son rispettivamente uguali e similmente disposti, ne segue che gli angoli solidi E ed F sono eguali. Ora, se si pone il prisma AEM sul prisma BFL, e in primo la base AEI sulla base BFK, queste due basi essendo uguali coincideranno; e poichè l'angolo solido E è uguale all'angolo solido F, il lato EH cadrà sul suo uguale FG: non bisogna altro di più per provare che i due prismi coincideranno in tutta la loro estensione; perchè la base AEI, e lo spigolo EH determinano il prisma AEM, come la base BEK, e lo spigolo FG determinano il prisma BFL (1): dunque questi prismi sono uguali.

Ma se dal solido AL si toglie il prisma AEM, resterà il parallelepipedo AIL; e se dallo stesso solido AL si toglie il prisma BFL, resterà il parallelepipedo AEG: dunque i due parallelepipedi AIL; AEG sono equivalenti fra loro.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Due parallelepipedi della medesima base e della medesima altezza sono equivalenti fra loro.

Sia ABCD (Fig. 210) la base comune ai due parallelepipedi AG, AL: poichè questi parallelepipedi hanno la medesima altezza, le loro basi superiori EFGH, IKLM saranno nel medesimo piano. Di più i lati EF ed AB sono uguali e paralleli, come pure IK

(1) 3.

ed AB; dunque EF è uguale e parallela ad IK; per una simil ragione GF è uguale e parallela ad LK. Siano prolungati i lati EF, HG, come pure LK, IM; finchè gli uni e gli altri formino colle loro intersezioni il parallelogrammo NOPQ: è chiaro che questo parallelogrammo sarà uguale a ciascuna delle basi EFGH., IKLM. Ora se s'immagina un terzo parallelepipedo, che colla medesima base inferiore ABCD abbia per base superiore NOPQ; questo terzo parallelepipedo sarebbe equivalente al parallelepipedo AG (1), poichè avendo la stessa base inferiore, le basi superiori son comprese in un medesimo piano e fra le parallele GQ, FN. Per la medesima ragione questo terzo parallelepipedo sarebbe equivalente al parallelepipedo AL. Dunque i due parallelepipedi AF, AL, che hanno la medesima base e la medesima altezza, sono equivalenti fra loro.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Ogni parallelepipedo può esser cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente, che avrà la medesima altezza, ed una base equivalente.

Sia AG (Fig. 210) il parallelepipedo proposto, da' punti A, B, C, D, si alzino AI, BK, CL, DM, perpendicolari al piano della base; si formerà così il parallelepipedo AL equivalente al parallelepipedo AG, le cui facce laterali AK, BL, ecc. saranno rettangoli. Se dunque la base ABCD è un rettangolo, AL sarà il parallelepipedo rettangolo equivalente al parallelepipedo proposto AG. Ma se ABCD (Fig. 211) non è un rettangolo, si abbassino AO e BN perpendicolari sopra CD, dipoi OQ ed NP perpendicolari sopra la base, si avrà il solido ABNO:KPQ che sarà un parallelepipedo rettangolo: infatti, per costruzione, la base ABON, e la sua opposta IKPQ sono rettangoli, le facce laterali sono pur tali, poichè le costole AI, OQ, ecc. son perpendicolari al piano della base: dunque il solido AP è un parallelepipedo rettangolo. Ma i due parallelepipedi AP, AL, possono considerarsi come costrutti sulla medesima base ABKI, e colla medesima altezza AO; dunque sono equivalenti; dunque il parallelepipedo AG (Fig. 210, e 211), che era stato prima cangiato in un parallelepipedo equivalente AL, si trova di nuovo cangiato in un pa-

(1) 9.

Geom. Sol.

rallelepipedo rettangolo equivalente AP, che ha la medesima altezza AI, e la cui base ABNO è equivalente alla base ABCD.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Due parallelepipedi rettangoli AG, AL, (Fig. 212), che hanno la medesima base ABCD, stanno fra loro come le rispettive altezze AE, AI.

Supponiamo primieramente che le altezze AE, AI stiano fra loro come due numeri interi, per esempio, come 15 stia a 8. Si dividerà AE in 15 parti uguali, di cui AI ne conterrà 8, e per i punti di divisione x, y, z , ecc. si condurranno de' piani paralleli alla base. Questi piani divideranno il solido AG in 15 parallelepipedi parziali che saranno tutti uguali fra loro, come aventi basi uguali ed altezze uguali; basi uguali, perchè ogni sezione come MIKL, fatta in un prisma parallelamente alla sua base ABCD, è uguale a questa base (1); altezze uguali, perchè queste altezze sono le divisioni stesse Ax, xy, yz, ecc. Ora di questi 15 parallelepipedi eguali, otto sono contenuti in AL; dunque il solido AG stà al solido AL come 15 stà a 8, o in generale come l'altezza AE stà all'altezza AI.

In secondo luogo, se il rapporto di AE ad AI non può esprimersi in numeri, dico che nonostante si avrà *solid. AG: solid. AL :: AE: AI*. Poichè, se questa proposizione non ha luogo, supponiamo che si abbia *sol. AG: sol. AL :: AE: AO*. Si divida AE in parti eguali, di cui ciascuna sia minore di OI; vi sarà almeno un punto di divisione m fra O ed I. Sia P il parallelepipedo che ha per base ABCD, e per altezza Am. E poichè le altezze AE, Am stanno fra loro come due numeri interi, si avrà *sol. AG: P :: AE: Am*. Ma si ha, per ipotesi, *sol. AG: sol. AL :: AE: AO*; da ciò risulta *sol. AL: P :: AO: Am*. Ma AO è maggiore di Am; dunque bisognerebbe, perchè la proporzione avesse luogo, che il solido AL fosse maggiore di P; ora al contrario è minore; dunque è impossibile che il quarto termine della proporzione *sol. AG: sol. AL :: AE: x*, sia una linea maggiore di AI. Con un ragionamento simile si dimostrerebbe che il quarto termine non può esser minore di AI; dunque è eguale ad AI. Dunque i parallelepipedi rettangoli della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

P R O P O S I Z I O N E XIII.

T E O R E M A.

Due parallelepipedi rettangoli AG, AK (Fig. 213) che hanno la medesima altezza AE, stanno fra loro come le basi ABCD, AMNO.

Avendo situati i due solidi uno allato dell'altro, come la figura gli rappresenta, prolungandosi il piano ONKL, finchè incontri il piano DGCH secondo PQ; si avrà un terzo parallelepipedo AQ, che si potrà paragonare a ciascuno dei parallelepipedi AG, AK. I due solidi AG, AQ, avendo la medesima base AEHD, stanno fra loro come le rispettive altezze AB, AO; parimente i due solidi AQ, AK, avendo la medesima base AOLE, stanno fra loro come le loro altezze AD, AM. Perciò si avranno per le due proporzioni

$$\text{sol. AG} : \text{sol. AQ} :: \text{AB} : \text{AO},$$

$$\text{sol. AQ} : \text{sol. AK} :: \text{AD} : \text{AM}.$$

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, ed omettendo nel risultamento il moltiplicatore comune *sol. AQ*, si avrà

$$\text{sol. AG} : \text{sol. AK} :: \text{AB} \times \text{AD} : \text{AO} \times \text{AM}.$$

Ma $\text{AB} \times \text{AD}$ rappresenta la base ABCD, ed $\text{AO} \times \text{AM}$ rappresenta la base AMNO, dunque due parallelepipedi rettangoli della medesima altezza stanno fra loro come le rispettive basi.

P R O P O S I Z I O N E XIV.

T E O R E M A.

Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni.

Poichè, avendo situato i due solidi AG, AZ, (Fig. 213) in maniera che le loro superficie abbiano l'angolo comune BAE, prolungansi i piani necessari per formare il terzo parallelepipedo AK della medesima altezza del parallelepipedo AG. Si avrà per la proposizione precedente,

$$\text{sol. AG} : \text{sol. AK} :: \text{ABCD} : \text{AMNO}$$

Ma i due parallelepipedi AK, AZ, che hanno la medesima base AMNO, stanno fra loro come le loro altezze AE, AX, onde si ha

$$\text{sol. AK} : \text{sol. AZ} :: \text{AE} : \text{AX}.$$

Moltiplicando per ordine queste due proporzioni, ed ometten-

do nel risultamento il moltiplicatore comune *sol.* AK, si avrà
sol. AG : *sol.* AZ :: ABCD $\times$ AE : AMNO $\times$ AX.

Invece delle basi ABCD, ed AMNO, si può mettere AB $\times$ AD, ed AO $\times$ AM, il che darà:

sol. AG : *sol.* AZ :: AB $\times$ AD $\times$ AE : AO $\times$ AM $\times$ AX.

Dunque due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro ecc.

Scolio. Da ciò segue che si può prendere per misura d'un parallelepipedo rettangolo il prodotto della sua base per la sua altezza, o il prodotto delle sue tre dimensioni. Su questo principio valuteremo tutti gli altri solidi.

Per l'intelligenza di questa misura bisogna ricordare che s'intende per prodotto di due, o di più linee il prodotto dei numeri che rappresentano tali linee; e questi numeri dipendono dall'unità lineare, che si può prendere a piacimento: posto ciò, il prodotto delle tre dimensioni d'un parallelepipedo è un numero che non significa niente in se stesso, e che sarebbe differente se si fosse presa un'altra unità lineare. Ma, se si moltiplicano parimente le tre dimensioni d'un altro parallelepipedo valutandole sulla medesima unità lineare, i due prodotti staranno fra loro come i solidi, e daranno l'idea della loro grandezza relativa.

La grandezza d'un solido, il suo volume, o la sua estensione costituiscono ciò che si chiama la sua *solidità*: e la parola *solidità* è impiegata particolarmente per designare la misura d'un solido: così si dica che la solidità d'un parallelepipedo rettangolo è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza, o al prodotto delle sue tre dimensioni.

Essendo le tre dimensioni del cubo eguali fra loro, se il lato è 1, la solidità sarà $1 \times 1 \times 1$, ossia 1; se il lato è 2, la solidità sarà $2 \times 2 \times 2$, ovvero 8; se il lato è 3, la solidità sarà $3 \times 3 \times 3$, ossia 27, e così in seguito: perciò, essendo i lati dei cubi come i numeri 1, 2, 3, ecc., i cubi stessi, o le loro solidità sono come i numeri 1, 8, 27, ecc. Quindi è che in aritmetica si chiama *cubo* d'un numero il prodotto che risulta da tre fattori uguali a questo numero.

Se si proponesse di fare un cubo doppio d'un cubo dato, bisognerebbe che il lato del cubo cercato fosse al lato del cubo dato come la radice cubica di 2 è all'unità. Ora si trova facilmente con una costruzione geometrica la radice quadrata di 2, ma non si può trovare ugualmente la sua radice cubica, almeno colle semplici operazioni della geometria elementare, le quali consistono nel non impiegare che delle linee rette di cui

si conoscan due punti, e dei cerchi in cui sieno determinati i centri ed i raggi.

Per questa difficoltà il problema della *duplicazione del cubo* è stato celebre fra gli antichi geometri, come quello della *trisezione dell'angolo*, che è precisamente del medesimo ordine. Ma si conoscono fin da gran tempo le soluzioni di cui queste specie di problemi sono capaci, le quali, benchè meno semplici delle costruzioni della geometria elementare, non son per altro nè meno esatte, nè meno rigorose.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

La solidità d'un parallelepipedo, ed in generale la solidità d'un prisma qualunque, è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Poichè 1.° un parallelepipedo qualunque è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo della medesima altezza, e di base equivalente (1). Ora la solidità di quest'ultimo è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque la solidità del primo è parimente uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

2.° Ogni prisma triangolare è la metà d'un parallelepipedo costruito in modo che abbia la medesima altezza, ed una base doppia (2). Ora la solidità di quest'ultimo è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque quella del prisma triangolare è uguale al prodotto della sua base, metà di quella del parallelepipedo, moltiplicata per la sua altezza.

3.° Un prisma qualunque può esser diviso in tanti prismi triangolari della medesima altezza, quanti sono i triangoli che si possono formare nel poligono che gli serve di base. Ma la solidità di ogni prisma triangolare è uguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza, e poichè l'altezza è la medesima per tutti, ne segue che la somma di tutti i prismi parziali sarà uguale alla somma di tutti i triangoli che servono loro di basi, moltiplicata per l'altezza comune. Dunque la solidità d'un prisma poligono qualunque è uguale al prodotto della sua base moltiplicata per la sua altezza.

Corollario. Se si paragonano due prismi che abbiano la medesima altezza, i prodotti delle basi per le altezze staranno come le basi; dunque *due prismi della medesima altezza stan-*

(1) 11. — (2) 8

no fra loro come le loro basi; per una simil ragione, due prismi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

PROPOSIZIONE XVI.

LEMMA.

Se una piramide SABCDE (Fig. 214) è tagliata da un piano abd parallelo alla base.

1.° I lati $SA, SB, SC, \dots$ e l'altezza SO , saranno tagliati proporzionalmente in $a, b, c, \dots$ ed o ;

2.° La sezione $abcde$ sarà un poligono simile alla base ABCDE.

Poichè 1.° essendo paralleli i piani ABC, abc , le loro intersezioni AB, ab con un terzo piano SAB saranno parallele (1); dunque i triangoli SAB, Sab sono simili, e si ha la proporzione $SA : Sa :: SB : Sb$; si avrebbe pure $SB : Sb :: SC : Sc$; e così in seguito. Dunque tutti i lati $SA, SB, SC, \dots$ sono tagliati proporzionalmente in $a, b, c, \dots$, ecc. L'altezza SO è tagliata nella proporzione medesima al punto o , perchè BO e bo son parallele, perciò si ha $SO : So :: SB : Sb$.

2.° Poichè ab è parallela ad AB ; bc a BC , cd a CD , ecc., l'angolo $abc = ABC$, l'angolo $bcd = BCD$, e così in seguito. Inoltre, a cagione dei triangoli simili SAB, Sab , si ha $AB : ab :: SB : Sb$; ed a cagione dei triangoli simili SBC, Sbc , si ha $SB : Sb :: BC : bc$; dunque $AB : ab :: BC : bc$; avrebbesi pure $BC : bc :: CD : cd$, e così in seguito. Dunque i poligoni $ABCDE, abcde$, hanno gli angoli rispettivamente uguali, ed i lati omologhi proporzionali; dunque sono simili.

Corollario. Sieno $SABCDE, SXYZ$ due piramidi, il cui vertice è comune, e che hanno la medesima altezza, ovvero le cui basi sono situate sopra un medesimo piano; se si tagliano queste piramidi con un medesimo piano parallelo a quello delle basi, e che ne risultino le sezioni $abcde, xyz$; dico che le sezioni $abcde, xyz$, staranno fra loro come le basi, $ABCDE, XYZ$.

Poichè, essendo simili i poligoni $ABCDE, abcde$, le loro superficie stanno come i quadrati dei lati omologhi AB, ab ; ma $AB : ab :: SA : Sa$; dunque $ABCDE : abcde :: SA^2 : Sa^2$.

Per la medesima ragione, $XYZ : xyz :: SX^2 : Sx^2$. Ma poichè abc, xyz stanno in un medesimo piano, si ha pure $SA : Sa :: SX : Sx$; dunque $ABCDE : abcde :: XYZ : xyz$; dunque

(1) 10., 5.

le sezioni $abcde$, xyz , stanno fra loro come le basi $ABCDE$, XYZ . Quindi se le basi $ABCDE$, XYZ sono equivalenti, le sezioni fatte ad eguali altezze sono ancora equivalenti.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Due piramidi triangolari che hanno le basi equivalenti e le altezze eguali sono equivalenti.

Sieno $SABC$, $sabc$ (Fig. 213) le due piramidi le cui basi ABC , abc , che supponiamo situate sullo stesso piano, siano equivalenti, ed abbiano la stessa altezza TA . Se queste due piramidi non sono equivalenti, sia $sabc$ la minore, e sia Ax l'altezza di un prisma che essendo costruito sulla base ABC sarebbe uguale alla loro differenza

Si divida l'altezza comune AT in parti uguali minori di Ax , e sia k una di queste parti. Per i punti di divisione dell'altezza, si facciano passare de' piani paralleli a quello delle basi; le sezioni fatte da ciascuno di questi piani nelle due piramidi, saranno equivalenti (1), tali come DEF e def , GHI e ghi , ecc. Ciò posto sopra i triangoli ABC , DEF , GHI ecc. presi per basi, si costruiscano altrettanti prismi esterni che abbiano per spigoli le parti AD , DG , GK , ecc. dello spigolo SA . Similmente sopra i triangoli def , ghi , kim , ecc. presi per basi si costruiscano nella seconda piramide de' prismi interni, che abbiano per spigoli le parti corrispondenti dello spigolo sa : tutti questi prismi parziali avranno per altezza comune k .

La somma de' prismi esterni della piramide $SABC$, è maggiore della stessa piramide, la somma de' prismi interni della piramide $sabc$, è minore della medesima piramide: dunque per queste due ragioni la differenza tra le due somme de' prismi dovrà essere maggiore della differenza delle due piramidi.

Ora ad incominciare dalle basi ABC , abc , il secondo prisma esterno $DEFGE$ è equivalente al primo prisma interno $defa$, poichè le loro basi DEF , def , sono equivalenti ed hanno l'altezza comune k ; per la stessa ragione sono equivalenti il terzo prisma esterno $GHIK$ ed il secondo interno $ghid$, il quarto esterno ed il terzo interno, e così di seguito fino all'ultimo degli uni e degli altri. Dunque tutti i prismi esterni della piramide $SABC$, ad eccezione del prisma $ABCD$, hanno i loro equivalenti ne' prismi interni della piramide $sabc$. Dunque il pris-

(1) 16. cor.

ma $ABCD$ è la differenza tra la somma de' prismi esterni della piramide $SABC$ e la somma de' prismi interni della piramide $sabc$; ma la differenza di queste due somme è maggiore della differenza delle due piramidi; dunque bisognerebbe che il prisma $ABCD$ fosse maggiore del prisma $ABCx$; ora al contrario è minore, poichè questi hanno la medesima base ABC , e l'altezza k del primo è minore dell'altezza Ax del secondo. Dunque l'ipotesi dalla quale si è partito non potrebbe aver luogo; dunque le due piramidi $SABC$, $sabc$, di basi equivalenti e di eguali altezze sono equivalenti.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Ogni piramide triangolare è il terzo del prisma della medesima base e della medesima altezza.

Sia $SABC$ (Fig. 216) una piramide triangolare, $ABCDES$, un prisma triangolare della medesima base e della medesima altezza, dico che la piramide è il terzo del prisma.

Si tolga dal prisma la piramide $SACB$, resterà il solido $SACDE$, che si può considerare come una piramide quadrangolare il cui vertice è S , e che abbia per base il parallelogrammo $ACDE$. Si tiri la diagonale CE , e si conduca il piano SCE , che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari $SACE$, $SDCE$. Queste due piramidi hanno per altezza comune la perpendicolare abbassata dal vertice S sul piano $ACDE$; esse hanno le basi eguali, perchè i triangoli ACE , DCE , sono la metà del medesimo parallelogrammo; dunque le due piramidi $SACE$, $SDCE$, sono equivalenti fra loro; ma la piramide $SDCE$ e la piramide $SABC$ hanno le basi uguali ABC , DES , ed hanno ancora la medesima altezza, perchè quest'altezza è la distanza de' piani paralleli ABC , DES , dunque le due piramidi $SABC$, $SDCE$, sono equivalenti. Ma si è dimostrato che la piramide $SDCE$ è equivalente alla piramide $SACE$; dunque le tre piramidi $SABC$, $SDCE$, $SACE$, che compongono il prisma ADB sono equivalenti tra loro. Dunque la piramide $SABC$ è il terzo del prisma ADB , che ha la medesima base e la medesima altezza.

Corollario. La solidità di una piramide triangolare è uguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Ogni piramide SABCDE (Fig. 214) ha per misura il terzo del prodotto della sua base ABCDE per la sua altezza SO.

Poichè, facendo passare i piani SEB, SEC per le diagonali EB, EC, si dividerà la piramide poligona SABCDE in più piramidi triangolari, che avranno tutte la medesima altezza SO. Ma, pel teorema precedente, ognuna di queste piramidi si misura moltiplicando ciascuna delle basi ABE, BCE, CDE pel terzo della sua altezza SO, dunque la somma delle piramidi triangolari, o la piramide poligona SABCDE, avrà per misura la somma de' triangoli ABE, BCE, CDE, ossia il poligono ABCDE moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO; dunque ogni piramide ha per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. Ogni piramide è la terza parte del prisma della medesima base e della medesima altezza.

Corollario II. Due piramidi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, e due piramidi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

Scolio. Si può valutare la solidità di ogni corpo poliedro scomponendolo in piramidi; e questa decomposizione si può fare in più maniere; una delle più semplici è di far passare i piani di divisione pel vertice di uno stesso angolo solido; allora si avranno tante piramidi parziali quante facce sono nel poliedro, eccetto quelle che formano l'angolo solido donde partono i piani di divisione.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Due poliedri simmetrici sono equivalenti tra loro, ovvero uguali in solidità.

Poichè 1.° due piramidi triangolari simmetriche, tali come SABC, TABC (Fig. 202), hanno per misura comune il prodotto della base ABC pel terzo dell'altezza SO ovvero TO; dunque queste piramidi sono equivalenti tra loro.

2.° Se si divide in una maniera qualunque uno de' poliedri simmetrici in piramidi triangolari, si potrà dividere parimente l'altro poliedro in piramidi triangolari simmetriche: ora le piramidi triangolari simmetriche son rispettivamente

equivalenti; dunque i poliedri interi saranno equivalenti tra loro, o uguali in solidità.

Scolio. Questa proposizione sembrava risultare immediatamente dalla proposizione II. ; ove si è fatto vedere che in due poliedri simmetrici tutte le parti costituenti d' un solido sono eguali alle parti costituenti dell' altro; ma non era però meno necessario il dimostrarla in una maniera più rigorosa.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base, il tronco che resta togliendo la piccola piramide, è uguale alla somma di tre piramidi che hanno per altezza comune, l' altezza del tronco, e le cui basi sono la base inferiore del tronco la sua base superiore ed una media proporzionale fra queste due basi.

Sia $SABCDE$ (Fig. 217) una piramide tagliata dal piano abd parallelo alla base; sia $TFGH$ una piramide triangolare, in cui la base, e l' altezza sieno uguali, o equivalenti a quelle della piramide $SABCDE$. Si possono supporre le due basi situate sopra un medesimo piano, ed allora il piano abd prolungato determinerà nella piramide triangolare una sezione fgh situata alla medesima altezza da sopra il piano comune delle basi: dal che risulta che la sezione fgh sta alla sezione abd , come la base FGH sta alla base ABC (1); e poichè le basi sono equivalenti, le sezioni lo saranno pure. Le piramidi $Sabcde$, $Tfgh$ sono dunque equivalenti, giacchè hanno la medesima altezza e le basi equivalenti. Le piramidi intere $SABCDE$, $TFGH$ sono equivalenti per la medesima ragione; dunque i tronchi $ABDdab$, $FGHfg$, sono equivalenti, e per conseguenza basterà dimostrare la proposizione enunciata pel solo caso del tronco di piramide triangolare.

Sia dunque $FGHhfg$ (Fig. 219) un tronco di piramide triangolare a basi parallele: per i tre punti F, g, H , si faccia passare il piano FgH , che taglierà dal tronco la piramide triangolare $gFGH$. Questa piramide ha per base la base inferiore FGH del tronco; ha pure per altezza l' altezza del tronco, poichè il vertice g è nel piano della base superiore fgh .

Dopo aver tolta questa piramide, resterà la piramide quadrangolare $fghHF$, il cui vertice è g e la base $fhHF$. Per i tre punti f, g, H si conduca il piano fgH , che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari $gFfH$, $gfhH$.

(1) 16.

Quest'ultima ha per base la base superiore gfh del tronco, e per altezza l'altezza del tronco, poichè il suo vertice H appartiene alla base inferiore. Quindi abbiamo già due delle tre piramidi che debbon comporre il tronco.

Resta a considerare la terza gF/H : ora, se si conduce gH parallela ad FH , e che s'immagina una nuova piramide fHK , il cui vertice è K e la base F/H , queste due piramidi avranno la medesima base F/H , esse avranno pure la medesima altezza poichè i vertici g e K sono situati sopra una linea gK parallela a FH , e per conseguenza parallela al piano della base; dunque queste piramidi sono equivalenti. Ma la piramide fKH può esser considerata come se avesse il suo vertice in f , e così ella avrà la medesima altezza del tronco; quanto poi alla sua base fKH dico ch'è media proporzionale fra le basi FGH , gfh . Infatti i triangoli FHK , gfh hanno un angolo uguale $F=f$ ed un lato uguale $FK=fg$; si ha dunque (1) $FHF : fgh :: FH : fh$. Si ha pure $FHG : FHK :: FG : FK$, o fg . Ma i triangoli simili FGH , gfh danno $FG : fg :: FH : fh$; dunque $FGH : FHK :: FHK : fgh$, e quindi la base FGK è media proporzionale fra le due basi FGH , gfh . Dunque un tronco di piramide triangolare, a basi parallele, equivale a tre piramidi che hanno per altezza comune l'altezza del tronco, e le cui basi sono la base inferiore del tronco, la sua base superiore ed una media proporzionale fra queste due basi.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se si taglia un prisma triangolare di cui ABC (Fig. 216) è la base, con un piano DES inclinato a questa base, il solido $ABCDES$, che risulta da questa sezione, sarà eguale alla somma di tre piramidi, i vertici delle quali sono D , E , S , e la base comune ABC .

Per i tre punti S , A , C , si faccia passare il piano SAC , che taglierà dal prisma troncato $ABCDES$ la piramide triangolare $SABC$: questa piramide ha per base ABC , e per vertice il punto S .

Dopo aver tolta questa piramide, resterà la piramide quadrangolare $SACDE$, di cui S è il vertice, ed $ACDE$ la base. Per i tre punti S , E , C , conducasi il piano SEC , che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari $SACE$, $SCDE$.

(1). 24, 3.

La piramide SAEC, che ha per base il triangolo AEC, e per vertice il punto S, è equivalente ad una piramide EABC, che avesse per base AEC e per vertice il punto B. Difatti queste due piramidi hanno la medesima base, ed hanno ancora la medesima altezza, poichè la linea BS essendo parallela a ciascuna delle linee AE, CD, è parallela al loro piano ACE; dunque la piramide SAEC è equivalente alla piramide EABC, la quale può esser considerata come se avesse per base ABC e per vertice il punto E.

La terza piramide SCDE può esser cambiata primieramente in ASCD, perchè queste due piramidi hanno la medesima base SCD; ed hanno ancora la medesima altezza, poichè AE è parallela al piano SCD, dunque la piramide SCDE è equivalente ad ASCD. In seguito la piramide ASCD può esser cambiata in ABCD, perchè queste due piramidi hanno la base comune ACD, ed hanno ancora la medesima altezza, poichè il loro vertici S e B sono situati sopra una parallela al piano della base. Dunque la piramide SCDE, equivalente ad ASCD, è ancora equivalente ad ABCD; ora questa piramide può esser riguardata come se avesse per base ABC, e per vertice il punto D.

Dunque finalmente il prisma troncato ABCDE è uguale alla somma di tre piramidi, che hanno per base comune ABC ed i cui vertici sono rispettivamente i punti D, E, S.

Corollario. Se i lati AE, BS, CD sono perpendicolari al piano della base; essi saranno nel medesimo tempo le altezze delle tre piramidi che compongono il prisma troncato, di modo che la solidità del prisma troncato sarà allora espressa da $\frac{1}{3}ABC \times AE + \frac{1}{3}ABC \times BS + \frac{1}{3}ABC \times CD$, quantità, che riducesi ad $\frac{1}{3}ABC \times (AE + BS + CD)$ (a).

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Due piramidi triangolari simili hanno le facce omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Secondo la definizione, le due piramidi triangolari SABC, TDEF (Fig. 203) sono simili se i due triangoli SAB, ABC, sono simili ai due TDE, DEF, e similmente disposti, cioè, se si ha l'angolo $AB\hat{S}=DET$, $BAS=EDT$, $ABC+DEF$, $BAC=EDF$, e se inoltre l'inclinazione dei piani SAB, ABC, è u-

(a) Vedete l'appendice posta alla fine di questo volume.

guale a quella dei piani TDE, DEF; posto ciò, d'co che queste piramidi hanno tutte le facce rispettivamente simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Si taglino $EG=ED$, $BI=EF$, $BI=ET$, e si uniscano GH, GI, HI. La piramide TDEF è uguale alla piramide IGBH; poichè, avendo preso i lati GB, BH, uguali ai lati DE, EF, e l'angolo GHB essendo per supposizione eguale all'angolo DEF, il triangolo GHB è uguale a DEF, dunque, per effettuare la sovrapposizione delle due piramidi, si può primieramente situare la base DEF sulla sua uguale GBH; dipoi, giacchè il piano DTE è inclinato sopra DEF quanto lo è il piano SAB sopra ABC, è chiaro che il piano DET cadrà indefinitamente sopra il piano ABS. Ma, per supposizione, l'angolo $DET=GBI$, dunque ET cadrà sulla sua uguale BI; e poichè i quattro angoli D, E, F, T, coincidono con i quattro G, B, H, I, ne segue, (1) che la piramide TDEF coincide colla piramide IGBH.

Ora, a cagione dei triangoli uguali DEF, GBH, si ha l'angolo $BGH=EDF=BAC$; dunque GH è parallela ad AC. Per una simile ragione GI è parallela ad AS; dunque il piano IGH è parallelo ad SAC (2). Da ciò segue che il triangolo IGH, o il suo uguale TDF, è simile a SAC (3), e che il triangolo IGH, o il suo uguale TEF è simile a SAC, dunque le due piramidi triangolari simili SABC, TDEF hanno le quattro facce rispettivamente simili: inoltre hanno gli angoli solidi omologhi uguali.

Imperocchè si è di già situato l'angolo solido E sul suo omologo B, e si potrebbe fare lo stesso per due altri angoli solidi omologhi: ma si vede immediatamente che due angoli solidi omologhi sono uguali, per esempio, gli angoli T ed S, poichè sono formati da tre angoli piani rispettivamente uguali, e similmente disposti.

Dunque due piramidi triangolari simili hanno le facce omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Corollario I. I triangoli simili nelle due piramidi danno le proporzioni $AB:DE::BC:EF::AC:DF::AS:DT::SB:TE::SC:TF$; dunque nelle piramidi triangolari simili i lati omologhi sono proporzionali.

Corollario II. E poichè gli angoli solidi omologhi sono uguali, ne segue che l'inclinazione di due facce qualunque d'una piramide è uguale all'inclinazione delle facce omologhe della piramide simile.

(1) 1. — (2) 13, 5. — (3) 15.

Corollario III. Se si taglia la piramide triangolare $SABC$ con un piano GIH parallelo ad una delle facce SAC , la piramide parziale $BGIH$ sarà simile alla piramide intera $BASC$: poichè i triangoli BGI , BGH sono rispettivamente simili ai triangoli BAS , BAC , e similmente disposti; l'inclinazione dei loro piani è la medesima da ambe le parti; dunque le due piramidi sono simili.

Corollario IV. In generale, se si taglia una piramide qualunque $SABCDE$ (Fig. 214) con un piano $abcde$ parallelo alla base, la piramide parziale $Sabcde$ sarà simile alla piramide intera $SABCDE$. Poichè le basi $ABCDE$, $abcde$ son simili, e tirando AC , ac si è dimostrato che la piramide triangolare $SABC$ è simile alla piramide $Sabc$; dunque il punto S è determinato per rapporto alla base ABC , come il punto S per rapporto alla base abc (1), dunque le due piramidi $SABCDE$, $Sabcde$ sono simili.

Scolio. In vece dei cinque dati richiesti dalla definizione perchè due piramidi triangolari sieno simili, si potrebbero sostituirne altri cinque secondo differenti combinazioni, e ne risulterebbero altrettanti teoremi, fra' quali si può distinguere questo: *Due piramidi triangolari sono simili quando hanno i lati omologhi proporzionali.*

Poichè se si hanno le proporzioni $AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: AS : DT :: SB : TE :: SC : TF$, il che comprende cinque condizioni, i triangoli ABS , ABC , saranno simili ai triangoli DET , DEF , e similmente disposti. Si avrà pure il triangolo SBC simile a TEF ; dunque i tre angoli piani, che formano l'angolo solido B , saranno uguali rispettivamente agli angoli piani, che formano l'angolo solido E ; donde ne segue che l'inclinazione dei piani SAB , ABC è uguale a quella dei loro omologhi TDE , DEF , e che perciò le due piramidi sono simili.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Due poliedri simili hanno le facce omologhe simili e gli angoli solidi omologhi uguali.

Sia $ABCDE$ (Fig. 219) la base d' un poliedro; sieno M e N i vertici di due angoli solidi fuori di questa base, determinati dalle piramidi triangolari $MABC$, $NABC$, la cui base comune è ABC ; sieno nell' altro poliedro $abcde$ la base

(1) Def. 48.

omologa o simile ad $ABCDE$; m e n i vertici omologhi ad M ed N , determinati dalle piramidi di $mabc$, $nabc$ simili alle piramidi $MABC$, $NABC$; dico primieramente che le distanze MN mn sono proporzionali ai lati omologhi AB , ab .

Infatti, essendo simili le piramidi $MABC$, $mabc$, l'inclinazione dei piani MAC , BAC è uguale a quella dei piani mac , bac ; parimente, essendo simili le piramidi $NABC$, $nabc$, l'inclinazione dei piani NAC , BAC è uguale a quella dei piani nac , bac ; dunque, se si tolgano le prime inclinazioni dalle ultime, resterà l'inclinazione dei piani NAC , MAC uguale a quella dei piani nac , mac . Ma a ragione della similitudine delle stesse piramidi, il triangolo MAC è simile a mac , ed il triangolo NAC è simile ad nac : dunque le due piramidi triangolari $MNAC$, $mnac$ hanno due facce rispettivamente simili e similmente disposte ed ugualmente inclinate fra loro; dunque queste piramidi sono simili (1), e i loro lati omologhi danno la proporzione $HN : mn :: AM : am$. D'altronde $AM : am :: AB : ab$; dunque $MN : mn :: AB : ab$.

Sieno P e q due altri vertici omologhi dei medesimi poliedri; si avrà similmente $PN : pn :: AB : ab$; $PM : pm :: AB : ab$; dunque $MN : mn :: PN : pn :: PM : pm$. Dunque il triangolo PNM , che unisce tre vertici qualunque d'un poliedro, è simile al triangolo pnm che unisce i tre vertici omologhi dell'altro poliedro.

Sieno inoltre Q , e q due vertici omologhi, ed il triangolo PQN sarà simile a pqn . Dico di più che l'inclinazione dei piani PQN , PMN è uguale a quella dei piani pqn , pnm .

Poichè se si tirino QM e qm , si avrà sempre il triangolo QNM simile a qnm , e per conseguenza l'angolo QNM uguale qnm . Si concepisca in N un angolo solido formato dai tre piani QNM , QNP , PNM ed in n un altro angolo solido formato dai tre angoli piani qnm , qnp , pnm : poichè questi angoli piani sono rispettivamente uguali, ne segue che gli angoli solidi sono uguali. Dunque l'inclinazione dei due piani PNQ , PNM è uguale a quella dei loro omologhi pnq , pnm ; dunque, se i due triangoli PNQ , PNM fossero in un medesimo piano, nel qual caso si avrebbe l'angolo $QNM = QNP + PNM$, si avrebbe pure l'angolo $qnm = qnp + pnm$: ed i due triangoli qnp , pnm sarebbero pure in un medesimo piano.

Tutto ciò che abbiamo dimostrato ha luogo qualunque sieno gli angoli M , N , P , Q , paragonati ai loro omologhi m , n , p , q .

Supponiamo ora che la superficie d' uno dei poliedri sia divisa in triangoli ABC , ACD , MNP , NPQ , ecc.; si vede che la superficie dell' altro poliedro conterrà un egual numero di triangoli abc , acd , mnp , npq , ecc. simili e similmente disposti; e se più triangoli, come MPN , NPQ , ecc., apparten-gano ad una medesima faccia, e sono un medesimo piano, i loro omologhi mpn , npq , ecc., saranno parimente in un medesimo piano. Dunque ogni faccia poligona in un poliedro corrisponderà ad una faccia poligona simile nell' altro poliedro e perciò i due poliedri saranno compresi da un medesimo numero di piani simili, e similmente disposti. Dico di più che gli angoli solidi omologhi saranno uguali.

Poichè, se l'angolo solido N , per esempio, è formato dagli angoli piani QNP , PNM , MNR , QNR , l'angolo solido omologo n sarà formato dagli angoli piani qnp , pnm , mnr , qnr . Ora questi angoli piani sono rispettivamente uguali, e l' inclinazione di due piani adiacenti è uguale a quella dei loro omologhi; dunque i due angoli solidi sono uguali poichè possono essere sovrapposti.

Dunque finalmente due poliedri simili hanno le faccie omologhe simili, e gli angoli solidi omologhi uguali.

Corollario. Segue dalla dimostrazione precedente che, se con quattro vertici d' un poliedro si formi una piramide triangolare, e si formi pure un' altra piramide con i quattro vertici omologhi d' un poliedro simile, queste due piramidi saranno simili, perchè avranno i lati omologhi proporzionali (1).

Si vede nel tempo stesso che due diagonali omologhe (2), per esempio, AN , an stanno fra loro come due lati omologhi AB , ab .

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Due poliedri simili possono dividersi in un medesimo numero di piramidi triangolari simili rispettivamente, e similmente disposte.

Poichè si è già veduto che le superficie dei due poliedri si possono dividere in un medesimo numero di triangoli simili rispettivamente, e similmente disposti. Si considerano tutti i triangoli d' un poliedro eccetto quelli, che formano l'angolo solido A , come le basi di tante piramidi prese in-

(1) 21. scol. — (2) 17, 2.

sieme comporranno il poliedro; si divida parimente l'altro poliedro in piramidi, che abbiano per vertice comune quello dell'angolo α omologo ad A; è chiaro che la piramide la quale congiunge quattro vertici d'un poliedro, sarà simile alla piramide, che congiunge i quattro vertici omologhi dell'altro poliedro. Dunque due poliedri simili ec.

P R O P O S I Z I O N E XXVI.

T E O R E M A.

Due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi (Fig. 214.).

Poichè essendo simili due piramidi, la minore potrà essere situata nella maggiore, in maniera che abbiano l'angolo solido S comune. Allora le basi ABCDE, *abcde*, saranno parallele; poichè, siccome le facce omologhe sono simili (1), l'angolo *Sab* è eguale a SAB, come pure *Sbc* ad SBC; dunque il piano *abc* è parallelo al piano ABC (2). Ciò posto, sia SO la perpendicolare abbassata dal vertice S sul piano ABC, e sia *o* il punto ove questa perpendicolare incontra il piano *abc*; si avrà, secondo quello ch'è stato già dimostrato (3), $SO : So :: SA : Sa :: AB : ab$, e per conseguenza

$$\frac{2}{3} So : \frac{1}{3} So :: AB : ab$$

Ma, essendo le basi ABCDE, *abcde*, figure simili, si ha

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Moltiplicando queste due proporzioni termine a termine, ne risulterà la proporzione

$$ABCDE \times \frac{2}{3} So : abcde \times \frac{1}{3} So :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3;$$

ora $ABCDE \times \frac{2}{3} SO$ è la solidità della piramide SABCDE (4), ed $abcde \times \frac{1}{3} So$ è quella della piramide *Sabcde*, dunque due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei loro lati omologhi.

(1) 23. — (2) 13, 5. — (3) 16. — (4) 18.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Due poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

Poichè due poliedri simili (Fig. 219) possono essere divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari rispettivamente simili (1). Ora le due piramidi simili $APNM$, $apnm$ stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi AM , am , o come i cubi dei lati omologhi AB , ab . Lo stesso rapporto avrà luogo fra due altre piramidi omologhe qualunque; dunque la somma di tutte le piramidi che compongono un poliedro, ossia il poliedro stesso, stà all'altro poliedro, come il cubo d'un lato qualunque del primo, stà al cubo del lato omologo del secondo.

Scolio generale.

Possiamo presentare in termini algebrici, cioè nella maniera più succinta, la ricapitolazione delle principali proposizioni di questo libro, concernente le solidità dei poliedri.

Sia B la base d'un prisma, A la sua altezza; la solidità del prisma sarà $B \times A$, ovvero BA .

Sia B la base d'una piramide, A la sua altezza; la solidità della piramide sarà $B \times \frac{1}{3} A$, o $A \times \frac{1}{3} B$, ovvero $\frac{1}{3} BA$.

Sia A l'altezza d'un tronco di piramide a basi parallele: sieno B , e B' le sue basi; $\sqrt{BB'}$ sarà la media proporzionale fra esse; e la solidità del tronco sarà $\frac{1}{3} A (B + B' + \sqrt{BB'})$.

Sia B la base d'un tronco di prisma triangolare; A , A' , A'' sieno le altezze de' suoi tre vertici superiori; la solidità del prisma troncato sarà $\frac{1}{3} B \times (A + A' + A'')$.

Sieno finalmente P e p le solidità di due poliedri simili; A ed a due lati o due diagonali omologhe di questi poliedri; si avrà $P : p :: A^3 : a^3$.

(1) 28.

LIBRO VII.

DELLA SFERA.

DEFINIZIONI.

1. **LA sfera** è un solido terminato da una superficie curva, di cui tutti i punti sono ugualmente distanti da un punto interno che si chiama *centro*.

Si può immaginare la sfera come generata dalla rivoluzione del semicerchio DAE intorno al diametro DE (Fig. 200); poichè la superficie descritta con tal movimento della curva DAE avrà tutti i suoi punti e distanze uguali dal centro C.

II. Il *raggio della sfera* è una linea retta condotta dal centro a un punto della sua superficie; il *diametro* o *asse* è una linea, che passa pel centro, e termina da ambe le parti alla superficie.

Tutti i raggi della sfera sono uguali; tutti i diametri sono uguali, e doppi del raggio.

III. Si dimostrerà (1) che ogni sezione della sfera fatta da un piano è un cerchio: posto ciò si chiama *cerchio massimo* la sezione che passa pel centro, *cerchio minore* quella che non vi passa.

IV. Un *piano* è *tangente* alla sfera quando non ha che un solo punto comune colla sua superficie.

V. Il *polo d'un cerchio* della sfera è un punto della superficie ugualmente lontano da tutti i punti della circonferenza di quel cerchio. Si farà vedere (2) che ogni cerchio, massimo o minore, ha sempre due poli.

VI. *Triangolo sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da tre archi di cerchi massimi.

Questi archi, che si chiamano i *lati* del triangolo, vengono sempre supposti minori della semicirconferenza. Gli angoli, che i loro piani fanno fra loro, sono gli angoli del triangolo.

VII. Un *triangolo sferico* prende il nome di *rettangolo*, *isoscele*, *equilatero* ne' casi stessi d'un triangolo rettilineo.

VIII. *Poligono sferico* è una parte della superficie della sfera racchiusa da più archi di cerchi massimi.

(1) 4. — (2) 6.

ix. *Fuso* è la parte della superficie della sfera compresa fra due semicerchi massimi, che si terminano a un diametro comune.

x. Si chiama *cuneo*, ovvero *unglia sferica* la parte del solido della sfera compresa fra i medesimi semicerchi massimi, ed alla quale il fuso serve di base.

xi. *Piramide sferica* è la parte del solido della sfera compresa fra i piani d'un angolo solido, il cui vertice è al centro. La *base* della piramide è il poligono sferico intercetto tra i medesimi piani.

xii. Si chiama *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paralleli, che ne sono le *basi*. Uno di questi piani può esser tangente alla sfera; allora la *zona* non ha che una *base*.

xiii. *Segmento sferico* è la porzione del solido della sfera compresa fra due piani paralleli, che ne sono le *basi*.

Uno di questi piani può esser tangente alla sfera; allora il segmento sferico non ha che una *base*.

xiv. *L'altezza d'una zona*, o d'un *segmento* è la distanza dei due piani paralleli, che sono le *basi* della *zona* o del *segmento*.

xv. Mentre il semicerchio DAE (Fig. 220), girando intorno al diametro DE descrive la sfera, ogni settore circolare, come DCG o GCI, descrive un solido, che si chiama *settore sferico*.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

Ogni sezione della sfera, fatta da un piano, è un cerchio.

Sia AMB (Fig. 221.) la sezione fatta da un piano nella sfera, il cui centro è C. Dal punto C si abbassino la perpendicolare CO sul piano AMB, e differenti oblique CM, CM, CB a' diversi punti della curva AMB che termina la sezione.

Le oblique CM, CM, CB, sono uguali, poichè sono raggi della sfera; esse sono dunque ugualmente lontane dalla perpendicolare CO (1); dunque tutte le linee OM, OM, OB, sono uguali, dunque la sezione AMD è un cerchio di cui il punto O è il centro.

Corollario I. Se la sezione passa pel centro della sfera, il suo raggio sarà il raggio della sfera: dunque tutti i cerchi massimi sono uguali fra loro.

Corollario II. Due cerchi massimi si tagliano sempre in due parti uguali, poichè la loro comune intersezione, passando pel centro, è un diametro.

(1) 5, 5.

Corollario. III. Ogni cerchio massimo divide la sfera, e la sua superficie in due parti uguali: poichè se dopo aver separati i due emisferi, si applicano sulla base comune rivolgendo le loro convessità dal medesimo lato, le due superficie coincideranno una coll'altra, altrimenti vi sarebbero dei punti più vicini al centro gli uni che gli altri.

Corollario IV. Il centro d'un cerchio minore (Fig. 221), e quello della sfera sono sopra una medesima retta perpendicolare al piano del cerchio minore.

Corollario V. I cerchi minori sono tanto più piccoli quanto sono più lontani dal centro della sfera; poichè quanto è più grande la distanza CO, tanto è più piccola la corda AB, diametro del cerchio minore AMB.

Corollario VI. Per due punti dati sulla superficie d'una sfera si può far passare un arco di cerchio massimo; poichè i due punti dati, ed il centro della sfera sono tre punti, che determinano la posizione d'un piano. Ma intanto, se i due punti dati fossero alle estremità d'un diametro, allora questi due punti, ed il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbe un'infinità di cerchi massimi, che potrebbero passare per i due punti dati.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

In ogni triangolo sferico ABC (Fig. 222) un lato qualunque è minore della somma degli altri due.

Sia O il centro della sfera, e sieno tirati i raggi OA, OB, OC. Se s'immaginano i piani AOB, AOC, COB, questi piani formeranno al punto O un angolo solido, e gli angoli AOB, AOC, COB avranno per misura i lati AB, AC, BC del triangolo sferico ABC. Ora ciascuno dei tre angoli piani, che compongono l'angolo solido, è minore della somma degli altri due (1); dunque un lato qualunque del triangolo ABC è minore della somma degli altri due.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Il più corto cammino da un punto ad un altro sulla superficie della sfera, è l'arco di cerchio massimo che unisce i due punti dati.

Sia ANB (Fig. 223) l'arco di cerchio massimo che uni-

(1) 21, 5.

sce i punti A e B, e sia fuor di quest' arco, se è possibile M un punto della linea più corta fra A e B. Pel punto M si tirino gli archi di cerchio massimo MA, MB, e si tagli BN=MB.

Pel teorema precedente, l'arco ANB è più corto di $AM + MB$; togliendo da ambedue le parti $BN=BM$, resterà $AN < AM$. Ora la distanza da B ad M, sia ch'essa si confonda col l'arco BM, o ch'ella sia qualunque altra linea, è uguale alla distanza da B ad N; poichè facendo girare il piano del cerchio massimo BM intorno al diametro che passa per B, si può condurre il punto M sul punto N, ed allora la linea più corta da M a B, qualunque sia, si confonderà con quella da N a B; dunque i due cammini da A a B, l'uno che passa per M, l'altro per N, hanno una parte uguale da M a B, e da N a B. Il primo cammino, per supposizione, è il più corto: dunque la distanza da A a M è più corta della distanza da A ad N; il che sarebbe assurdo, poichè l'arco AM è maggiore di AN: dunque nessun punto della linea più corta fra A e B può essere fuori dell'arco ANB; dunque quest'arco stesso è la linea più corta fra le sue estremità.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

La somma dei tre lati d'un triangolo sferico è minore della circonferenza d'un cerchio massimo.

Sia ABC (Fig. 224) un triangolo sferico qualunque; si prolunghino i lati AB, AC, finchè s'incontrino di nuovo in D. Gli archi ABD, ACD, saranno mezze circonferenze, poichè due cerchi massimi si tagliano sempre in due parti uguali (1): ma nel triangolo BCD si ha il lato $BC < BD + CD$ (2); aggiungendo da ambe le parti $AB + AC$, si avrà $AB + AC + BC < ABD + ACD$, cioè minore d'una intera circonferenza.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

La somma dei lati d'ogni poligono sferico è minore della circonferenza d'un cerchio massimo.

Sia, per esempio, il pentagono ABCDE (Fig. 225): si

(1) 1. — (2) 2.

prolungano i lati AB , DC , finchè s'incontrino in F : poichè BC è minore di $BF + CF$, il contorno del pentagono $ABCDE$ è minore di quello del quadrilatero $AEDF$. Si prolungano nuovamente i lati AE , ED fino al loro incontro in G , si avrà $ED < EG + GD$; dunque il contorno del quadrilatero $AEDF$ è minore di quello del triangolo AFG ; ma questo contorno è minore della circonferenza d'un cerchio massimo: dunque con più ragione il contorno del poligono $ABCDE$ è minore di questa stessa circonferenza.

Scolio. Questa proposizione è in sostanza la medesima della XXII. del libro V.; poichè se O è il centro della sfera si può immaginare al punto O è un angolo solido formato dagli angoli piani AOB , BOC , COD . ecc., e la somma di questi angoli dev'essere minore di quattro angoli retti; il che non differisce dalla proposizione presente. La dimostrazione che ora n'abbiamo data, è differente da quella del libro V.; l'una, e l'altra suppongono che il poligono $ABCDE$ sia convesso, ovvero che nessun lato prolungato tagli la figura.

P R O P O S I Z I O N E VI.

T E O R E M A.

Se si conduce il diametro DE (Fig. 220) perpendicolare al piano del cerchio massimo AMB , le estremità D ed E di questo diametro saranno i poli del cerchio AMB , e di tutti i cerchi minori, come FNG , che gli son paralleli.

Poichè DC , essendo perpendicolare al piano AMB , è perpendicolare a tutte le rette CA , CM , CB , ec.; condotte dal suo piede in questo piano; dunque tutti gli archi DA , DM , DB , ec. sono quarte parti di circonferenza: lo stesso è degli archi EA , EM , EB , ec.; dunque i punti D ed E sono ciascuno ugualmente lontani da tutti i punti della circonferenza AMB ; dunque essi sono i poli di questa circonferenza (1).

In secondo luogo il raggio DC , perpendicolare al piano AMB , è perpendicolare al suo parallelo FNG ; e perciò passa pel centro O del cerchio FNG (2); dunque, se si tirino le oblique DF , DN , DG , queste oblique si allontaneranno ugualmente dalla perpendicolare DO , e saranno uguali. Ma, essendo uguali le corde, sono uguali gli archi corrispondenti; dunque tutti gli archi DF , DN , DG , ec. sono fra loro uguali: dunque il punto D è il polo del cerchio minore FNG , e per la medesima ragione il punto E è l'altro polo.

(1) Def. 5. — (2) 1.

Corollario I. Ogni arco DM condotto da un punto dell'arco di cerchio massimo AMB al suo polo è un quarto di circonferenza, che noi per abbreviare chiameremo *quadrante*; e questo quadrante fa nel medesimo tempo un angolo retto coll'arco AM . Poichè, essendo la linea DC perpendicolare al piano AMC , ogni piano DMC , che passa per la linea DC , è perpendicolare al piano AMC (1); dunque l'angolo di questi piani, o seguendo la definizione VI. l'angolo AMD , è un angolo retto.

Corollario II. Per trovare il polo di un arco dato AM , conducasi l'arco indefinito MD perpendicolare ad MA ; si prenda MD uguale a un quadrante, ed il punto D sarà uno dei poli dell'arco MD : ovvero conducansi per due punti A e M gli archi AD e MD perpendicolari ad AM , il punto d'incontro D di questi due archi sarà il polo cercato.

Corollario III. Reciprocamente, se la distanza del punto D da ciascuno dei punti A ed M è uguale ad un quadrante, dico che il punto D sarà il polo dell'arco AM , e che nel medesimo tempo gli angoli DAM , AMD saranno retti.

Poichè sia C il centro della sfera, e sieno condotti i raggi CA , CD , CM : poichè gli angoli ACD , MCD sono retti, la linea CD è perpendicolare alle due rette CA , CM ; dunque essa è perpendicolare al loro piano; dunque il punto D è il polo dell'arco AM ; ed in conseguenza gli angoli DAM , AMD sono retti.

Scolio. Le proprietà dei poli permettono di segnare sulla superficie della sfera archi di cerchio colla medesima facilità che sopra una superficie piana. Si vede per esempio, che facendo girare l'arco DF , o qualunque altra linea dello stesso intervallo intorno al punto D , l'estremità F descriverà il cerchio minore FNG ; e se si fa girare il quadrante DFA intorno al punto D , l'estremità A descriverà l'arco di cerchio massimo AM .

Se bisogna prolungare l'arco AM , o se non sieno dati che i soli punti A e M , per i quali deve passare quest'arco, si determinerà prima il polo D mediante l'intersezione di due archi descritti dai punti A ed M , come centri, con un intervallo uguale al quadrante. Avendo trovato il polo D , si descriverà dal punto D , come centro, e col medesimo intervallo l'arco AM ed il suo prolungamento.

Finalmente, se da un punto dato P si deve abbassare un arco perpendicolare sull'arco dato AM , si prolungherà questo arco in S fino a che l'intervallo PS sia eguale ad un quadrante; in seguito dal polo S , e col medesimo intervallo si descriverà l'arco PM , che sarà l'arco perpendicolare cercato.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Ogni piano perpendicolare all'estremità d'un raggio è tangente alla sfera.

Sia FAG (Fig. 226) un piano perpendicolare all'estremità del raggio OA; se si prende un punto qualunque M su questo piano, e si tirino OM ed AM, l'angolo OAM sarà retto, e perciò la distanza OM sarà maggiore di OA. Il punto M è dunque fuori della sfera; e, siccome è lo stesso per ogni altro punto del piano FAG, ne segue che questo piano non ha che il solo punto A comune colla superficie della sfera; dunque è tangente a questa superficie (1).

Scolio. Si può dimostrar similmente che due sfere non hanno che un sol punto comune, e sono per conseguenza tangenti l'una dell'altra: quando la distanza dei loro centri è eguale alla somma, o alla differenza dei loro raggi, allora i centri, ed il punto di contatto sono in linea retta.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

L'angolo BAC (Fig. 226), che fanno tra loro due archi di cerchi massimi AB, AC, è uguale all'angolo FAG formato dalle tangenti di questi archi al punto A: esso ha pure per misura l'arco DE descritto dal punto A come polo fra i lati AB, AC, prolungati se sia necessario.

Poichè la tangente AF, condotta nel piano dell'arco AB, è perpendicolare al raggio AO; la tangente AG, condotta nel piano dell'arco AC, è perpendicolare al medesimo raggio AO. Dunque l'angolo FAG è uguale all'angolo dei piani OAB, OAC, (2), ch'è quello degli archi AB, AC, e che s'indica con BAC.

Parimente, se l'arco AD è uguale ad un quadrante, come pure AE, le linee OD, OE saranno perpendicolari ad AO, e l'angolo DOE sarà pure eguale all'angolo dei piani AOD, AOE; dunque l'arco DE è la misura dell'angolo di questi piani, ossia la misura dell'angolo CAB.

Corollario. Gli angoli dei triangoli sferici possono paragonarsi fra loro per mezzo degli archi di cerchi massimi de-

(1) Def. 4. — (2) 17. 3.

scritti dai loro vertici come poli e compresi fra i loro lati. Quindi è facile fare un angolo sferico uguale ad un angolo dato.

Scolio. Gli angoli opposti al vertice, tali come ACO e BCN (Fig. 238) sono eguali; poichè l'uno o l'altro è sempre l'angolo formato dai due piani ACB, OCN.

Si vede pure che nell'incontro dei due archi ACB, OCN i due angoli adiacenti ACO, OCB, presi insieme, equivalgono sempre a due angoli retti.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Essendo dato il triangolo sferico ABC, (Fig. 227) se dai punti A, B, C, come poli si descrivano gli archi EF, FD, DE, che formano il triangolo DEF; reciprocamente i tre punti D, E, F, saranno i poli dei lati BC, AC, AB.

Poichè, essendo il punto A il polo dell'arco EF, la distanza AE è un quadrante; essendo il punto C il polo dell'arco DE, la distanza CE è parimente un quadrante, dunque il punto E è lontano un quadrante da ciascuno dei punti A e C; dunque esso è il polo dell'arco AC (1). Si dimostrerà similmente che D è il polo dell'arco BC, ed F quello dell'arco AB.

Corollario. Dunque il triangolo ABC può esser descritto per mezzo di DEF, come DEF per mezzo di ABC.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Poste le medesime cose che nel teorema precedente, ciascun angolo d'un dei triangoli ABC, DEF, (Fig. 227) avrà per misura la mezza circonferenza, meno il lato opposto nell'altro triangolo.

Sieno prolungati, se è necessario, i lati AB, AC finchè incontrino EF in G ed H: poichè il punto A è il polo dell'arco GH, l'angolo A avrà per misura l'arco GH. Ma l'arco EH è un quadrante, come pure GF, poichè E è il polo di AH, ed F è il polo di AG: dunque EH+GF equivale ad una semicirconferenza. Ora EH+GF è lo stesso che EF+GH; dunque l'arco GH, che misura l'angolo A, è uguale ad una semicirconferenza meno il lato EF; parimente l'angolo B avrà per misura $\frac{1}{2}$ circ.—DF, e l'angolo C, $\frac{1}{2}$ circ.—DE.

(1) G.

Questa proprietà dev'essere reciproca fra i due triangoli, poichè si descrivono nella stessa maniera l'uno col mezzo dell'altro. Così troveremo che gli angoli D, E, F del triangolo DEF hanno per misura rispettivamente $\frac{1}{2}circ. - BC$, $\frac{1}{2}circ. - AC$, $\frac{1}{2}circ. - AB$. Infatti l'angolo D, per esempio, ha per misura l'arco MI: ora $MI + BC = MC + BI = \frac{1}{2}circ.$: dunque l'arco MI, misura dell'angolo D, $= \frac{1}{2}circ. - BC$; e così degli altri.

Scolio. Bisogna osservare che oltre al triangolo DEF (Fig. 228) se ne potrebbero formare tre altri mediante l'intersezione dei tre archi DE, EF, DF. Ma la proposizione attuale non ha luogo che pel triangolo centrale, che è distinto dagli altri tre in ciò che i due angoli A e D (Fig. 227) son situati dalla medesima parte di BC, i due B ed E dalla medesima parte di AC, ed i due C e F da una medesima parte di AB.

Si danno differenti nomi a due triangoli ABC, DEF: noi li chiameremo *triangoli polari*.

PROPOSIZIONE XI.

LEMMA.

Essendo dato un triangolo ABC (Fig. 229) se dal polo A, e coll'intervallo AC si descriva l'arco di cerchio minore DEC; se dal polo B, e coll'intervallo BC si descriva parimente l'arco DFC; e se dal punto D, ore gli archi DEC, DFC si tagliano, si conducano gli archi di cerchio massimo AD, DB; dico che il triangolo ADB così formato avrà le sue parti uguali a quelle del triangolo ABC.

Poichè, per costruzione, il lato $AD = AC$, $DB = BC$, AB è comune; dunque questi due triangoli hanno i lati rispettivamente uguali.

Dico ora che gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali.

Infatti, se si suppone il centro della sfera in O, si può concepire un angolo solido formato al punto O dai tre angoli piani AOB, AOC, BOC; si può concepire parimente un secondo angolo solido formato dai tre angoli piani AOB, AOD, BOD. E poichè i lati del triangolo ABC sono uguali a quelli del triangolo ABD, ne segue che gli angoli piani, che formano uno di questi angoli solidi, sono rispettivamente uguali agli angoli piani, che formano l'altro angolo solido; ma in tal caso si è dimostrato (1) che i piani in cui sono gli angoli uguali, son egualmente inclinati fra loro; dunque gli angoli del

(1) 25, 3.

triangolo sferico DAB sono uguali a quelli del triangolo CAB, cioè $DAB=BAC$, $DBA=ABC$, ed $ADB=ACB$; dunque i lati, e gli angoli del triangolo ADB sono uguali ai lati, ed agli angoli del triangolo ACB.

Scolio. L'uguaglianza di questi triangoli non è però un'uguaglianza assoluta, o di sovrapposizione, poichè sarebbe impossibile d'applicarli l'uno sull'altro esattamente, salvo che non fossero isosceli. L'uguaglianza, di cui si tratta, è quella, che abbiamo già chiamata uguaglianza per simmetria; e per questa ragione chiameremo i triangoli ACB, ADB triangoli simmetrici.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Due triangoli situati sopra la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono eguali in tutte le loro parti quando hanno un angolo uguale compreso fra lati rispettivamente uguali.

Sia il lato $AB=EF$ (Fig. 230), il lato $AC=EG$, è l'angolo $BAC=FEG$; il triangolo EFG potrà essere situato sopra il triangolo ABC, o sul suo simmetrico ABD nella medesima maniera che si sovrappengono due triangoli rettilinei, che hanno un angolo uguale compreso fra lati uguali. Dunque tutte le parti del triangolo EFG saranno uguali a quelle del triangolo ABC, vale a dire che oltre le tre parti, che sono supposte uguali, si avrà il lato $BC=FG$, l'angolo $ABC=EFG$; e l'angolo $ACB=EGF$.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Due triangoli situati sopra la medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono uguali in tutte le loro parti quando hanno un lato uguale adiacente a due angoli rispettivamente uguali.

Poichè uno di questi triangoli può essere situato sopra l'altro, o sul suo simmetrico, come si fa nel caso simile dei triangoli rettilinei. Ved. la prop. VII. del lib. I.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se due triangoli situati sulla medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono equilateri fra loro, saranno anche equiangoli, e gli angoli uguali saranno opposti ai lati uguali.

Ciò è manifesto per la proposizione XI. ove si è veduto che con tre lati dati AB, AC BC (Fig. 229) non si possono fare che due triangoli ACB, ABD differenti in quanto alla posizione delle parti, ma uguali in quanto alla grandezza di queste medesime parti. Dunque due triangoli equilateri fra loro sono o assolutamente uguali, o almeno uguali per simmetria; in ambedue i casi sono equiangoli, e gli angoli uguali sono opposti ai lati uguali.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati uguali sono uguali; e reciprocamente, se due angoli d'un triangolo sferico sono uguali, il triangolo sarà isoscele.

1.° Sia il lato $AB=AC$ (Fig. 231); dico che si avrà l'angolo $C=B$: poichè, se dal vertice A al punto D, medio della base si conduce l'arco AD, i due triangoli ABD, ADC avranno i lati rispettivamente uguali, cioè AD comune, $BD=DC$, ed $AB=AC$; dunque, pel teorema precedente, questi triangoli avranno gli angoli uguali, e si avrà $B=C$.

2.° Sia l'angolo $B=C$; dico che si avrà $AC=AB$: poichè, se il lato AB non è uguale ad AC, sia BA il maggiore di essi; si faccia $BO=AC$, e si unisca OC. I due lati BO, BC sono uguali ai due lati AC, BC; l'angolo compreso dai primi OBC è uguale all'angolo compreso dai secondi ACB. Dunque i due triangoli BOC, ACB hanno le altre parti uguali (1), e si ha l'angolo $OCB=ABC$: ma l'angolo ABC, per supposizione $=ACB$; dunque si avrebbe $OCB=ACB$; il che è impossibile: dunque non si può supporre AB differente da AC; dunque i lati AB, AC, opposti agli angoli uguali B, e C, sono uguali.

Scolio. La medesima dimostrazione prova che l'angolo $BAD=DAC$, e che l'angolo $BDA=ADC$. Dunque questi due ultimi sono retti: dunque l'arco condotto dal vertice d'un

triangolo sferico isoscele alla metà della sua base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti uguali.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

In un triangolo sferico ABC (Fig. 232), se l'angolo A maggiore dell'angolo B, il lato BC opposto all'angolo A sarà maggiore del lato AC opposto all'angolo B: reciprocamente, se il lato BC, è maggiore di AC, l'angolo A sarà maggiore dell'angolo B.

1.° Sia l'angolo $A > B$; si faccia l'angolo $BAD = B$, e si avrà $AD = DB$ (1); ma $AD + DC$ è maggiore di AC , dunque mettendo BD in vece di AD , si avrà $DB + DC$, o $BC > AC$.

2.° Se si suppone $BC > AC$, dico che l'angolo BAC sarà maggiore di ABC : poichè, se BAC fosse uguale ad ABC , si avrebbe $BC = AC$; e se fosse $BAC < ABC$, ne seguirebbe, secondo ciò che si è dimostrato, che si ha $BC < AC$; il che è contra la supposizione. Dunque l'angolo BAC è maggiore di ABC .

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se i due lati AB, AC (Fig. 233) del triangolo sferico ABC sono uguali ai due lati DE DF del triangolo DEF descritto sopra una sfera uguale; se nello stesso tempo l'angolo A è maggiore dell'angolo D; dico che il terzo lato BC del primo triangolo sarà maggiore del terzo EF del secondo.

La dimostrazione è assolutamente simili a quella della prop. X del Lib. I.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se due triangoli descritti sulla medesima sfera, o sopra sfere uguali, sono equiangoli fra di loro, essi saranno pure equilateri.

Sieno A e B i due triangoli dati; P e Q i loro triangoli polari. Poichè gli angoli sono uguali nei triangoli A e B, i lati saranno uguali nei polari P e Q (2); ma dall'essere i triangoli P e Q equilateri fra loro ne segue che sono ancora equiangoli (3). Finalmente dall'essere uguali gli angoli ne' triangoli

(1) 13. — (2) 10. — (3) 14.

P e Q ne segue (1) che i lati sono uguali nei loro polari A e B. Dunque i triangoli equiangoli A e B sono nel medesimo tempo equilateri tra loro.

Si può ancor dimostrare la medesima proposizione senza il soccorso dei triangoli polari nella maniera seguente.

Sieno ABC, DEF (Fig. 234) due triangoli equiangoli fra loro, di modo che si abbia $A=D$, $B=E$, $C=F$: dico che si avrà il lato $AB=DE$, $AC=DF$, $BC=EF$.

Sul prolungamento dei lati AB, AC prendasi $AG=DE$, ed $AH=DF$: si tiri GH, e si prolunghino gli archi, BC, GH finchè s'incontrino in I, e K.

I due lati AG, AH sono, per costruzione, uguali ai due DF, DE; l'angolo compreso $GAH=BAC=EDF$; dunque (2) i triangoli AGH, DEF sono uguali in tutte le loro parti; dunque l'angolo $AGH=DEF=ABC$, e l'angolo $AHG=DFE=ACB$.

Nei triangoli IBG, KBG il lato BG è comune, l'angolo $ICB=CBK$, e poichè $ICB+BCK$, è uguale a due retti, come pure $GBK+IBG$, ne segue che $BCK=IBG$. Dunque i triangoli IBG, GBK sono uguali (3); dunque $IG=BK$, ed $IB=GK$.

Similmente dall'essere l'angolo $AHG=ACB$ si conchiuderà che i triangoli ICH, HCK hanno un lato uguale adiacente a due angoli uguali; dunque sono eguali; dunque $IH=CK$, ed $IK=IC$.

Ora, se dagli uguali BK, IG si tolgono gli uguali CK, IH, i resti BC, CH saranno uguali. D'altronde l'angolo $BAC=AHG$, e l'angolo $ABC=ACH$. Dunque i triangoli ABC, AHG hanno un lato uguale adiacente a due angoli uguali, dunque sono uguali: ma il triangolo DEF è uguale in tutte le sue parti al triangolo AHG; dunque esso è uguale ancora al triangolo ABC, e si avrà $AB=DE$, $AC=DF$, $BC=EF$; dunque, se due triangoli sferici sono equiangoli fra loro, i lati opposti agli angoli uguali saranno uguali.

Scolio. Questa proposizione non ha luogo nei triangoli rettilinei, ove dall'uguaglianza degli angoli non si può dedurre altro che la proporzionalità rispettiva dei lati. Ma è facile di render conto della differenza, che si trova per questo riguardando tra i triangoli rettilinei, ed i triangoli sferici. Nella proposizione presente, come pure nelle proposizioni XII, XIII, XIV, e XVII, ove si tratta del paragone dei triangoli, si dice espressamente che questi triangoli son descritti sulla medesima sfera, o sopra sfere uguali. Ora gli archi simili sono proporzionali ai raggi; dunque sopra sfere uguali due triangoli non possono esser simili senza essere uguali. Non fa maraviglia dun-

que che l'uguaglianza degli angoli porta seco l'uguaglianza dei lati.

Sarebbe altrimenti se i triangoli fosser descritti sopra sfere disuguali: allora essendo uguali gli angoli, i triangoli sarebbero simili, ed i lati omologhi sarebbero fra loro come i raggi delle sfere.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

La somma degli angoli d'ogni triangolo sferico è minore di sei, e maggiore di due angoli retti.

Poichè 1.º ciascun angolo d'un triangolo sferico è minore di due angoli retti (vedete lo scolio seguente); dunque la somma dei tre angoli è minore di sei angoli retti.

2.º La misura di ciascun angolo d'un triangolo sferico è uguale alla semicirconferenza meno il lato ad esso opposto del triangolo polare (1). Dunque la somma dei triangoli ha per misura tre semicirconferenze meno la somma dei lati del triangolo polare. Ora quest'ultima somma è minore di una circonferenza (2); dunque togliendola da tre semicirconferenze, il resto sarà maggiore di una semicirconferenza, che è la misura di due angoli retti; dunque 2.º la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è maggiore di due angoli retti.

Corollario I. La somma degli angoli d'un triangolo sferico non è costante come quella dei triangoli rettilinei; essa varia da due angoli retti fino a sei, senza poter essere uguale nè all'uno, nè all'altro limite. Quindi è che due angoli dati non fan conoscere il terzo.

Corollario II. Un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti, due o tre angoli ottusi.

Se il triangolo ABC (Fig. 235) è *bi-rettangolo*, cioè se ha due angoli retti B, e C, il vertice A sarà il polo della base BC (5), ed i lati AB, AC, saranno quadranti.

Se inoltre l'angolo A è retto, il triangolo ABC, sarà *tri-rettangolo*, i suoi angoli saranno tutti retti, ed i suoi lati quadranti. Il Triangolo *tri-rettangolo* è contenuto otto volte nella superficie della sfera, ciò si vede per mezzo della fig. 236, supponendo l'arco MN uguale ad un quadrante.

Scolio. Abbiamo supposto in tutto ciò che precede, e conformemente alla definizione VI, che i triangoli sferici han-

(1) 10. — (2) 4. — (3) 6.

no i loro lati sempre minori della semicirconferenza; allora ne segue che gli angoli sono sempre minori di due angoli retti; poichè, se il lato AB è minore della semicirconferenza, come pure AC , questi archi devono esser prolungati ambedue per incontrarsi in D . Ora i due angoli ABC , CBD presi insieme equivalgono a due angoli retti, dunque l'angolo ABC solo è minore di due angoli retti.

Osserveremo però ch' esistono de' triangoli sferici di cui certi lati sono maggiori della semicirconferenza, e certi angoli maggiori di due angoli retti. Perchè, se si prolunga il lato AC in una circonferenza intera ACE , ciò che resta togliendo dalla semisfera il triangolo ABC , è un nuovo triangolo, che si può ancora indicare con ABC , ed i cui lati sono AB , BC , $AEDC$. Si vede dunque che il lato $AEDC$ è maggiore della semicirconferenza AED ; ma nel medesimo tempo l'angolo opposto in B supera due angoli retti della quantità angolare CBD .

Del resto si sono esclusi dalla definizione i triangoli i cui lati ed angoli sono sì grandi, perchè la loro risoluzione, o la determinazione delle loro parti si riduce sempre a quella dei triangoli compresi nella definizione suddetta. Infatti si vede facilmente che, se si conoscono gli angoli, e i lati del triangolo ABC , si conosceranno immediatamente gli angoli, ed i lati del triangolo del medesimo nome, ch'è il resto della semisfera.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Il fuso $AMBNA$ (Fig. 236) sta all'a superficie della sfera come l'angolo MAN di questo fuso sta a quattro angoli retti, o come l'arco MN , che misura quest'angolo sta alla circonferenza.

Supponiamo primieramente che l'arco MN stia alla circonferenza $MNPQ$ in un rapporto razionale, per esempio come 5 sta a 48. Si dividerà la circonferenza $MNPQ$ in 48 parti uguali, di cui MN ne conterrà 5; congiungendo il polo A ed i punti di divisione con altrettanti quarti di circonferenza, si avranno 48 triangoli nella semisfera $AMNPQ$, che saranno tutti uguali fra loro, poichè avranno tutte le loro parti uguali. La sfera intera conterrà dunque 96 di questi triangoli parziali, ed il fuso $AMBNA$, ne conterrà 10; dunque il fuso sta alla superficie della sfera come 10 sta a 96, o come 5 sta a 48, cioè, come l'arco MN sta alla circonferenza.

Se l'arco MN non è commensurabile colla circonferenza, si proverà collo stesso ragionamento, di cui si son già veduti

molti esempi, che il fuso sta sempre alla superficie della sfera come l'arco MN sta alla circonferenza.

Corollario I. Due fusi stanno fra loro come i loro angoli rispettivi.

Corollario II. Si è già veduto che la superficie intera della sfera è uguale ad otto triangoli tri-rettangoli (1); dunque se si prende per unità l'area d'uno di questi triangoli, la superficie della sfera sarà rappresentata da 8. Ciò posto, la superficie del fuso, il cui angolo A, sarà espressa da $2A$ (se però l'angolo A è valutato nella supposizione che l'angolo retto sia uguale all'unità); poichè si ha $2A : 8 :: A : 4$. Vi sono qui dunque due unità differenti, una per gli angoli, ch'è l'angolo retto, l'altra per le superficie, ch'è il triangolo sferico tri-rettangolo, ossia quello di cui tutti gli angoli sono retti, ed i lati sono quarte parti di circonferenza.

Scolio. L'unghia sferica compresa fra i piani AMB, ANB sta al solido intero della sfera come l'angolo A sta a quattro angoli retti. Poichè, essendo uguali i fusi, le unghie sferiche saranno parimente uguali: dunque due unghie sferiche stanno fra loro come gli angoli formati dai piani che le comprendono.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Due triangoli sferici simmetrici sono eguali in superficie.

Sieno ABC, DEF, (Fig. 237) due triangoli simmetrici, vale a dire due triangoli che hanno i lati eguali, cioè $AB=DE$, $AC=DF$, $CB=EF$, e che frattanto non possono essere sovrapposti; dico che la superficie ABC è uguale alla superficie DEF.

Sia P il polo del cerchio minore, che passerebbe per i tre punti A, B, C (a); da questo punto sieno condotti gli archi eguali (2) PA, PC, PB; al punto F si faccia l'angolo $DFQ=ACP$, l'arco $FQ=CP$, e si tirino DQ, EQ.

I lati DF, FQ sono eguali ai lati AC, CP, l'angolo $DFQ=ACP$; dunque i due triangoli DFQ, ACP sono uguali in tutte le

(a) Il cerchio, che passa per i tre punti A, B, C, o ch'è circoscritto al triangolo ABC, non può essere che un cerchio minore della sfera; perchè, se questo fosse cerchio massimo, i tre lati AB, BC, AC sarebbero situati in un medesimo piano, e il triangolo ABC si ridurrebbe ad un dei suoi lati.

(1) 19. — (2) 6.

loro parti (1); dunque il lato $DQ=AP$, e l'angolo $DQF=APC$.

Nei triangoli proposti DFE , ABC , gli angoli DFE , ACB , opposti ai lati eguali DE , AB , essendo eguali (2), se si tolgono gli angoli DFQ , ACP , eguali per costruzione, resterà l'angolo QFE eguale a PCB . D'altronde i lati QF , FE , sono eguali ai lati PC , CB , dunque i due triangoli FQE , CPB sono eguali in tutte le loro parti; dunque il lato $QE=PB$, e l'angolo $FQE=CPB$.

Se si osserva ora che i triangoli DFQ , APC , che hanno i lati rispettivamente eguali, sono nel medesimo tempo isosceli, si vedrà che posson essere sovrapposti l'uno all'altro; perchè, avendo situato PA sopra il suo eguale QF , il lato PC cadrà sopra il suo eguale QD , e così i due triangoli si confonderanno in un solo; dunque sono eguali; dunque la superficie $DQF=APC$. Per una simil ragione, la superficie $FQE=CPB$, e la superficie $DQE=APB$; dunque si ha $DQF+FQE=DQE=APC+CPB=APB$, ovvero $DFE=ABC$; dunque i due triangoli simmetrici ABC , DEF , sono eguali in superficie (a).

(1) 12. (2) 11.

(a) † Questa dimostrazione suol recare agli giovani qualche difficoltà, non vedendo chiaramente perchè gli angoli DFE , ed ABC sieno la somma di $DFQ+QFE$ e di $ACP+PCB$, mentre i lati di questi angoli non sono in un piano, ma bensì sulla superficie della sfera. Ad oggetto quindi di prevenire questa difficoltà, si fa loro osservare che gli angoli compresi dagli archi DF , FQ , FE sono eguali a quelli fatti dalle tangenti tirate a questi medesimi archi dal punto di loro incontro F . Ora queste tangenti essendo perpendicolari al medesimo raggio della sfera tirato al punto F staranno in un piano, e perciò l'angolo fatto dalle tangenti degli archi DF , FE , è eguale alla somma di quelli fatti dalle tangenti degli archi DF , FQ , e di FQ , EF . Lo stesso si dica dell'angolo ACB .

Del resto questo teorema vien dimostrato da Vincent, e da altri Autori più chiaramente nel seguente modo.

Per i vertici degli angoli de' triangoli ABC , DEF (fig. A) si facciano passare i rispettivi cerchi minori, da' poli P , e Q di questi cerchi si tirino a' vertici degli angoli de' due triangoli gli archi di cerchio massimo PA , PB , PC , QD , QE , QF .

I due triangoli sferici ABC , DEF avendo i lati rispettivamente eguali, anche le loro corde saranno eguali rispettivamente, e perciò i triangoli rettilinei formati da queste corde saranno ancora eguali. Quindi i cerchi ad essi circoscritti sa-

Scolio. I poli P, e Q potrebbero essere situati al didentro dei triangoli ABC, DEF, allora bisognerebbe aggiungere i tre triangoli DQF, FQE, DQE affin di comporne il triangolo DEF, e similmente bisognerebbe aggiungere i tre triangoli APC, CPB, APB per comporne il triangolo ABC; d'altronde la dimostrazione, e la conclusione sarebbero sempre le stesse.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se due cerchi massimi AOB, COD (Fig. 238) si tagliano come si voglia nell' emisfero AOCBD, la somma dei triangoli opposti AOC, BOD sarà uguale al fuso il cui angolo è BOD.

Poichè, prolungando gli archi OB, OD nell'altro emisfero finchè s'incontrino in N, OBN sarà una semicirconferenza, comè pure AOB; togliendo da ambe le parti OB, si avrà $BN = AO$. Per una simile ragione si ha $DN = CO$, e $BD = AG$: dunque i due triangoli AOC, BDN hanno i tre lati uguali: d'altronde la lor posizione è tale ch'essi sono simmetrici l'uno dell'altro; dunque sono eguali in superficie (1), e la somma dei triangoli AOC, BOD è equivalente al fuso OBND, il cui angolo è BOD.

Scolio. È chiaro pure che le due piramidi sferiche, che hanno per basi i triangoli AOC, BOD, prese insieme equivalgono all'unglia sferica, il cui angolo è BOD.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

La superficie d'un triangolo sferico qualunque ha per misura l'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.

Sia ABC (Fig. 239) il triangolo proposto; prolungansi i suoi lati finchè incontrino il cerchio massimo DEFG condotto ad arbitrio fuor del triangolo. In virtù del teorema precceden-

ranno eguali, ed i loro poli P, e Q staranno situati ad eguali altezze da' loro piani e perciò sarà $PA = PB = PC = QD = QE = QF$. Onde i triangoli sferici isosceli PAC, QDF saranno eguali, come ancora PCB, QFE, e PAB, QDE. Dunque si avrà $PAC + PCB - PAB = QDF + QFE - QDE$, ossia $ABC = DEF$.

(1) 21.

to, i due triangoli ADE, AGH, presi insieme equivalgono al fuso il cui angolo è A, e che ha per misura $2A$ (1): quindi si avrà $ADE + AGH = 2A$: per una simile ragione $BGF + BID = 2B$, $CIH + CFE = 2C$. Ma la somma di questi sei triangoli supera la semisfera di due volte il triangolo ABC; d'altronde la semisfera è rappresentata da 4; dunque il doppio del triangolo ABC è uguale a $2A + 2B + 2C - 4$, e per conseguenza $ABC = A + B + C - 2$; dunque ogni triangolo sferico ha per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti.

Corollario I. Quanti angoli retti vi saranno in tal misura, altrettanti triangoli tri-rettangoli, ossia ottave parti di sfera, ciascuna delle quali è l'unità di superficie, saranno contenute nel triangolo proposto. Per esempio, se gli angoli son tutti uguali a $\frac{1}{2}$ d'un angolo retto, allora i tre angoli varranno 4 angoli retti, ed il triangolo proposto sarà rappresentato da $4 - 2$, ovvero 2; dunque sarà uguale a due triangoli tri-rettangoli, o al quarto della superficie della sfera.

Corollario II. Il triangolo sferico ABC è equivalente al fuso $A + B + C$, il cui angolo è $\frac{A + B + C}{2} - 1$; similmente la piramide sferica, la cui base è ABC, equivale all' unghia sferica, il cui angolo è $\frac{A + B + C}{2} - 1$.

Scolio. Nello stesso tempo che si paragona il triangolo sferico ABC al triangolo tri-rettangolo, la piramide sferica, che ha per base ABC, si paragona alla piramide tri-rettangola, e ne risulta la medesima proporzione. L'angolo solido al vertice della piramide si paragona parimente all'angolo solido al vertice della piramide tri-rettangola: infatti il paragone si stabilisce mediante la coincidenza delle parti: Ora, se le basi delle piramidi coincideranno, è evidente che anche le piramidi, coincideranno, come pure gli angoli solidi al loro vertice. Da ciò risultano più conseguenze.

1.° Due piramidi triangolari sferiche stanno fra loro come le loro basi; e poichè una piramide poligona può dividersi in più piramidi triangolari, ne segue che due piramidi sferiche qualunque stanno fra loro come i poligoni che servono loro di basi.

2. Gli angoli solidi al vertice delle medesime piramidi stanno ugualmente nella proporzione delle basi; dunque, per paragonare due angoli solidi qualunque, bisogna situare i loro vertici al

centro di due sfere uguali; e questi angoli solidi saranno fra loro come i poligoni sferici intercetti fra i loro piani o facce.

L'angolo al vertice della piramide tri-rettangola è formato da tre piani perpendicolari fra loro: quest'angolo, che si può chiamare *angolo solido retto*, è attissimo per servire d'unità di misura agli altri angoli solidi. Ciò posto, il medesimo numero, che dà l'aria d'un poligono sferico, darà la misura dell'angolo solido corrispondente. Per esempio, se l'aria d'un poligono sferico è $\frac{1}{2}$, vale a dire, se è $\frac{1}{2}$ del triangolo tri-rettangolo, l'angolo solido corrispondente sarà pure $\frac{1}{2}$ dell'angolo solido retto.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

La superficie d'un poligono sferico ha per misura la somma de'suoi angoli, meno il prodotto di due angoli retti pel numero de' lati del poligono diminuito di due.

Dal medesimo vertice A (Fig. 240) sieno menate agli altri vertici le diagonali AC, AD; il poligono ABCDE sarà diviso in tanti triangoli meno due quanti sono i lati. Ma la superficie di ciascun triangolo ha per misura la somma de'suoi angoli meno due angoli retti, ed è chiaro che la somma di tutti gli angoli de'triangoli è uguale alla somma degli angoli del poligono: dunque la superficie del poligono è uguale alla somma de'suoi angoli diminuita di tante volte due angoli retti quanti sono i lati meno due.

Scolio. Sia s la somma degli angoli d'un poligono sferico, n il numero de' lati; posto l'angolo retto per unità, la superficie del poligono avrà per misura $s-2(n-2)$ ovvero $s-2n+4$.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

» Sia S il numero degli angoli solidi d'un poliedro, H il numero delle sue facce, A il numero delle sue costole; dico » che si avrà sempre $S+H=A+2$.

» Si prenda al di dentro del poliedro un punto, da cui » conducansi delle linee rette ai vertici di tutti i suoi angoli: » immaginasi dipoi che dal medesimo punto, come centro, si » descriva una superficie sferica, che sia incontrata da tutte » queste linee in altrettanti punti; congiungansi questi punti » con archi di cerchi massimi, in modo che si formino sulla

« superficie della sfera dei poligoni corrispondenti, ed uguali
 » in numero alle facce del poliedro. Sia ABCDE (Fig. 240)
 » uno di questi poligoni, e sia n il numero dei suoi lati; la
 » sua superficie sarà $s-2n+4$, essendo la somma degli an-
 » goli A, B, C, D, E. Se si valuti similmente la superficie
 » di ciascuno degli altri poligoni sferici, e si sommino tutte
 » insieme, se ne conchiuderà che la loro somma, o la super-
 » ficie della sfera, rappresentata da 8, è uguale alla somma
 » di tutti gli angoli dei poligoni meno due volte il numero
 » dei loro lati più 4 preso tante volte quante sono le facce.
 » Ora, siccome tutti gli angoli, che si formano intorno ad un
 » medesimo punto A, equivalgono a quattro angoli retti, la
 » somma di tutti gli angoli dei poligoni è uguale a 4 preso
 » tante volte quanti angoli solidi vi sono; dessa è dunque ugua-
 » le a 4S. Di più il doppio del numero dei lati AB, BC, CD,
 » ec. è uguale al quadruplo del numero delle costole, ossia
 » $=4A$, giacchè la medesima costola serve di lato a due facce;
 » dunque si avrà $8=4S-4A+4H$, ovvero, prendendo il quarto
 » di ciascun membro, $2=S-A+H$; dunque $S+H=A+2$.

» *Corollario.* Segue da ciò che la somma degli angoli pia-
 » ni che formano gli angoli solidi d'un poliedro, è uguale a
 » tante volte quattro angoli retti quante unità vi sono in $S-2$,
 » essendo S il numero degli angoli solidi del poliedro.

» Poichè, se si considera una faccia il cui numero de' lati
 » sia n , la somma degli angoli di questa faccia sarà $2n-4$
 » angoli retti (1): Ma la somma di tutti i $2n$, o il doppio del
 » numero dei lati di tutte le facce; $=4A$; e 4 preso tante
 » volte quante sono le facce $=4H$; dunque la somma degli
 » angoli di tutte le facce $=4A-4H$. Ora, pel teorema, che
 » abbiamo già dimostrato, si ha $A-H=S-2$, e per consequen-
 » za $4A-4H=4(S-2)$. Dunque la somma degli angoli piani ec.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

» Di tutti i triangoli sferici formati con due lati dati CB,
 » CA (Fig. 272, e 273), ed un terzo ad arbitrio, il più
 » grande ABC è quello nel quale l'angolo C, compreso fra i
 » lati dati, è uguale alla somma degli altri due angoli A e B.

» Prolungansi i due lati AC, AB fino al loro incontro in
 » D; si avrà un triangolo sferico BCD, nel quale l'angolo

(1) 28.

» DBC sarà parimente eguale alla somma degli altri due angoli BDC, BCD : poichè $BCD + BCA$ essendo uguale a due angoli retti, come pure $CBA + CBD$, si ha $BCD + BCA = CBA + CBD$: aggiungendo da ambe le parti $BDC = BAC$, si avrà $BCD + BCA + BDC = CBA + CBD + BAC$. Ora, per ipotesi $BCA = CBA + BAC$, dunque $CBD = BCD + BDC$.

» Conducasi BI, che faccia l'angolo $CBI = BCD$, e per conseguenza $IBD = BDC$; i due triangoli IBC, IBD, saranno isosceli, e si avrà $IC = IB = ID$. Dunque il punto I, medio di DC, è ad eguale distanza da i tre punti B, C, D : per una simile ragione, il punto O, medio di AB, sarà egualmente distante dai tre punti A, B, C.

» Sia ora $CA' = CA$ (Fig. 272), e l'angolo $BCA' > BCA$; se si tiri A'B, e che si prolungino gli archi A'C', A'B' fino al loro incontro in D', l'arco D'CA' sarà una mezza circonferenza, come pure DCA; dunque, poichè si ha $CA' = CA$, si avrà ancora $CD' = CD$. Ma nel triangolo CID' si ha $CI + ID' > CD'$, dunque $ID' > CD - CI$, ovvero $ID' > ID$.

» Nel triangolo isoscele CIB si divida l'angolo del vertice I in due parti eguali con l'arco EIF, che sarà perpendicolare sulla metà di BC. Se si prende un punto L tra I ed E, la distanza BL, eguale ad LC, sarà minore di BI, poichè si può dimostrare, come nella proposiz. IX. del Lib. I., che si ha $BL + LC < BI + IC$, dunque, prendendo le metà da ambe le parti, si avrà $BL < BI$. Ma nel triangolo D'LC si ha $D'I > D'C - CL$, e con più ragione $D'L > DC - CI$, ossia $D'L > DI$, o $D'L > BI$, dunque $D'L > BL$. Dunque se si cerca sopra l'arco EIF un punto egualmente distante dai tre punti B, C, D', questo punto non potrebbe trovarsi che sul prolungamento di EI verso F. Sia I' il punto cercato, in modo che s'abbia $D'I' = BI' = CI'$, i triangoli I'CB, I'CD', I'BD' essendo isosceli, si avranno gli angoli eguali $I'BC = I'CB$, $I'BD' = I'D'B$, $I'C'D' = I'D'C$. Ma gli angoli $D'BC + CBA'$ equivalgono a due angoli retti, come ancora $D'CB + BCA'$: dunque

$$D'BI' + I'BC + CBA' = 2,$$

$$BCI' - I'CD' + BCA' = 2.$$

» Addizionando le due somme, ed osservando che si ha $I'BC = BCI'$ e $D'BI' - I'CD' = BD'I' - I'D'C = CD'B = CA'B$, si avrà.

$$2I'BC + CA'B + CBA' + BCA' = 4.$$

» Dunque $CA'B + CBA' + BCA' - 2$ (misura dell'area del triangolo $A'BC$) $= 2 - 2I'BC$, di modo che si ha l'area $A'BC = 2 - 2\text{angolo}$

» l'BC; similmente nel triangolo ABC si avrebbe $aiaABC =$
 » 2—2angolo IBC. Ora si è dimostrato che l'angolo l'BC è
 » maggiore di IBC; dunque l'aia A'BC è minore di ABC.

» La medesima dimostrazione e la medesima conclusione
 » avrebbero luogo se, prendendo sempre l'arco $CA' = CA$ (Fig.
 » 275), si facesse l'angolo $BCA' < BCA$; dunque ABC è il
 » triangolo il più grande tra tutti quelli che hanno due lati
 » dati ed il terzo a piacere.

» *Scolio. I.* Il triangolo ABC, il più grande tra tutti
 » quelli che hanno due lati dati CA, CB, può essere inscritto
 » in un mezzo cerchio, di cui la corda del terzo lato AB sarà
 » il diametro, poichè O essendo il mezzo di AB, si è veduto
 » che le distanze OC, OB sono eguali, dunque la circonferen-
 » za del cerchio minore descritto dal punto O, come polo, e
 » con l'intervallo OB passerà per i tre punti, A, B, C. Di più
 » la linea retta BA è un diametro di questo cerchio minore;
 » poichè il centro, che dee trovarsi ad un tempo nel piano di
 » questo cerchio minore, e nel piano dell'arco di cerchio massi-
 » mo (1) BOA, si troverà necessariamente nell'intersezione di que-
 » sti due piani, ch'è la retta BA; e quindi BA sarà un diametro.

» *II.* Nel triangolo ABC, l'angolo C essendo eguale alla somma
 » degli altri due A e B, ne segue che la somma dei tre angoli è
 » doppia dell'angolo C. Ma questa somma è sempre maggiore di
 » due angoli retti (2); dunque l'angolo C è maggiore d'un retto.

» *III.* Se si prolungano i lati CB, CA, finchè s'incontrino in
 » E, il triangolo BAE sarà uguale al quarto della superficie
 » della sfera. Poichè l'angolo $E = C = ABC + CAB$; dunque i
 » tre angoli del triangolo BAE equivalgono ai quattro ABC,
 » ABE, CAB, BAE, la di cui somma è uguale a quattro
 » angoli retti; dunque la superficie del triangolo $BAE = 4 =$
 » 2=2 (3), che è il quarto della superficie della sfera.

» *IV.* Non vi sarebbe luogo al massimo se la somma dei
 » due lati dati CA, CB, fosse eguale, o maggiore di una
 » mezza circonferenza di un cerchio massimo. Poichè, siccome
 » il triangolo ABC dev'essere inscritto in un semicerchio della
 » sfera, la somma dei due lati CA, CB sarà minore della se-
 » micirconferenza BCA (4), e per conseguenza minore della
 » semicirconferenza d'un cerchio massimo.

» La ragione, per cui non vi è massimo quando la som-
 » ma dei due lati dati è maggiore della semicirconferenza d'un
 » cerchio massimo, si è perchè allora il triangolo aumenta di
 » più in più a misura che l'angolo compreso fra i lati dati è

(1) 1. Cor. 4. — (2) 19. — (5) 24. — (4) 3.

» più grande: finalmente, quando quest'angolo sarà uguale a
 » due retti, i tre lati saranno in uno stesso piano, e formeranno
 » una circonferenza intera: il triangolo sferico diventa dunque
 » eguale alla semisfera, ma cesserà allora d'esser triangolo.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

» *Di tutti i triangoli sferici formati con un lato dato ,
 » ed un perimetro dato , il più grande è quello in cui i due
 » lati non determinati sono uguali.*

» Sia AB (Fig. 242) il lato dato comune ai due triangoli ACB,
 » ADB, e sia $AC+CB=AD+DB$; dico che il triangolo isoscele
 » ACB, nel quale $AC=CB$, è maggiore del non isoscele ADB.

» Poichè, avendo questi triangoli la parte comune AOB,
 » basta di far vedere che il triangolo BOD è minore di AOC.
 » L'angolo CBA, uguale a CAB, è maggiore di OAB; onde
 » il lato AO è maggiore di OB (1); prendasi $Ol=OB$; si
 » faccia $OK=OD$; e si tiri KI: il triangolo OKI sarà uguale
 » a DOB (2). Se si nega ora che il triangolo DOB, o il suo
 » uguale KOI sia minore di OAC, bisognerà che sia uguale,
 » o maggiore, in ambedue i casi, siccome il punto I è fra
 » i punti A e O, bisognerà che il punto K sia sopra OC pro-
 » lungato, senza che il triangolo OKI sarebbe contenuto nel
 » triangolo CAO, e perciò sarebbe minore. Ciò posto, essendo
 » CA il più corto cammino da C ad A, si ha $CK+KI+IA$
 » $>CA$. Ma $CK=OD=CO$, $AI=AO-OB$, $KI=BD$; dunque
 » $OD=CO+AO-OB+BD > CA$, e riducendo $AD=CB+BD >$
 » CA , o $AD+BD > AC+CB$. Ora questa disuguaglianza è con-
 » traria alla supposizione di $AD+BD=AC+CB$; dunque il
 » punto K non può cadere sul prolungamento di OC; dunque
 » cade fra O e C, e per conseguenza il triangolo KOI, o il
 » suo uguale ODB è minore di ACO; dunque il triangolo iso-
 » scele ACB è maggiore del non isoscele ADB della medesima
 » base, e dello stesso perimetro.

» *Scolio.* Queste due ultime proposizioni sono analoghe
 » alle proposizioni I. e III. dell'appendice al Libro IV; la-
 » onde si possono dedurre per rapporto ai poligoni sferici le
 » conseguenze, che hanno luogo per i poligoni rettilinei.

» Eccone le principali.

» 1.^o *Di tutti i poligoni sferici isoperimetri, e d'un mede-*

(1) 16. — (2) 31.

» *zimo numero di lati, il maggiore è un poligono equilatero.*

» La medesima dimostrazione che nella proposizione II. dell'appendice al Libro IV.

» 2.^o *Di tutti i poligoni sferici formati con lati dati, ed un ultimo a piacimento, il più grande è quello, che si può inscrivere in un semicerchio, in cui la corda del lato non determinato sarà il diametro.*

» La dimostrazione si deduce dalla proposizione XXVI, come si è veduto nella proposizione IV dell'appendice citato, bisogna, perchè abbia luogo il massimo, che la somma dei lati dati sia minore della mezza-circonferenza d'un cerchio massimo.

» 3.^o *Il più grande dei poligoni sferici formati con lati dati, è quello che si può inscrivere in un cerchio della sfera.*

» La medesima dimostrazione che per la proposizione VI dell'appendice al Libro IV.

» 4.^o *Il più grande dei poligoni sferici, che hanno lo stesso perimetro, ed il medesimo numero di lati, è quello che ha i suoi angoli eguali, ed i suoi lati eguali.*

» Questo è ciò, che risulta dai corollari 1.^o e 3.^o che poco sopra precedono.

» *Nota* Tutte le proposizioni sul massimo riguardanti i poligoni sferici si applicano agli angoli solidi, di cui tali poligoni son la misura »



APPENDICE AI LIBRI VI. E VII.

I POLIEDRI REGOLARI

PROPOSIZIONE I.

T E O R E M A.

» *Non posson esservi che cinque poliedri regolari.*

» Poichè si son definiti per *poliedri regolari* quelli, di cui
 » tutte le facce sono poligoni regolari uguali, e di cui tutti
 » gli angoli solidi sono uguali fra loro. Queste condizioni non
 » possono aver luogo se non che in un piccol numero di casi.

» 1.° Se le facce son triangoli equilateri, si può formar
 » ciascun angolo solido del poliedro con tre angoli di questi
 » triangoli, o con quattro, o con cinque: quindi nascono tre
 » corpi regolari, che sono il tetraedro, l'ottaedro, e l'ico-
 » saedro. Non se ne può formare un maggior numero con
 » triangoli equilateri, poichè sei angoli di questi triangoli e-
 » quivalgono a quattro angoli retti, e non posson formare un
 » angolo solido (1).

» 2.° Se le facce son quadrati, si posson riunire i loro
 » angoli a tre a tre, e da ciò ne risulta l'essaedro o cubo.

» Quattro angoli di quadrato equivalgono a quattro an-
 » goli retti, e non posson formare un angolo solido.

» 3.° Finalmente, se le facce sono pentagoni regolari,
 » si potranno pure riunire i loro angoli a tre a tre e ne ri-
 » sulterà il dodecaedro regolare.

» Non si può andare più oltre; poichè tre angoli di e-
 » sagono regolare equivalgono a quattro angoli retti, e tre
 » angoli di ottagono sono ancor più.

» Dunque non si possono avere che cinque poliedri rego-
 » lari; tre formati con triangoli equilateri, uno con de' qua-
 » drati, ed uno con dei pentagoni.

» *Scolio.* Si proverà nella proposizione seguente che que-
 » sti cinque poliedri esistono realmente, e che se ne possono
 » determinare tutte le dimensioni quando si conosca una delle
 » lor facce.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

» Essendo data una delle facce d'un poliedro regolare ,
 » o soltanto il suo lato , descrivere il poliedro.

» Questo problema ne presenta cinque , che noi risolveremo successivamente.

Costruzione del Tetraedro.

» Sia ABC (Fig. 243) il triangolo equilatero, che dev'essere
 » una delle facce del tetraedro : dal punto O , centro di questo
 » triangolo, si elevi OS perpendicolare al piano AEC; prolungasi
 » questa perpendicolare al punto S, finchè sia $AS=AB$; si tirino
 » SB, SC; e la piramide SABC sarà il tetraedro richiesto.

» Poichè, a cagione delle distanze uguali OA, OB, OC, le
 » oblique SA , SB, SC si allontanano ugualmente dalla per-
 » pendicolare SO, e perciò sono uguali. Una di esse $SA=AB$;
 » dunque le quattro facce della piramide SABC sono triangoli
 » uguali al triangolo dato ABC. D'altronde gli angoli solidi
 » di questa piramide sono uguali fra loro, poichè ciascuno di
 » essi è formato con tre angoli piani uguali ; dunque questa
 » piramide è un tetraedro regolare.

Costruzione dell'esaedro.

» Sia ABCD (Fig. 244) un quadrato dato : sopra la base
 » ABCD si costruisca un prisma retto , la cui altezza AE sia
 » uguale al lato AB. È chiaro che le facce di questo prisma sono
 » quadrati uguali, e che i suoi angoli solidi sono uguali fra loro,
 » perchè vengon formati rispettivamente con tre angoli retti ;
 » dunque questo prisma è un esaedro regolare , o un cubo.

Costruzione dell'ottaedro.

» Sia AMB (Fig. 245) un triangolo equilatero dato : sul
 » lato AB descrivasi il quadrato ABCD; dal punto O, centro
 » di questo quadrato, si alzi sul suo piano la perpendicolare
 » TS, terminata dalle due parti in T ed in S, talmente che
 » $OT=OS=AO$; tiransi dipoi SA, SB, TA, ec., si avrà un
 » solido SABCDT composto di due piramidi quadrangolari
 » SABCD , TABCD addossate colla loro base comune ABCD :
 » questo solido sarà l'ottaedro regolare cercato.

» Infatti il triangolo AOS è rettangolo in O, come pure
 » il triangolo AOD; i lati AO, OS, OD sono uguali; dunque
 » questi triangoli sono uguali, dunque $AS=AD$. Si dimostrerà
 » parimente che tutti gli altri triangoli rettangoli AOF, BOS,
 » COT, ec. sono uguali al triangolo AOD; dunque tutti i lati
 » AB, AS, AT, ec. sono uguali fra loro, e per conseguenza
 » il solido SABCDT è composto da otto triangoli uguali al
 » triangolo equilatero dato ABM. Dico di più che gli angoli
 » solidi del poliedro sono uguali fra loro; per esempio, l'an-
 » golo S è uguale all'angolo B.

» Poichè è manifesto che il triangolo SAC è uguale al
 » triangolo DAC, e che perciò l'angolo ASC è retto: dunque
 » la figura SATC è un quadrato uguale al quadrato ABCD.
 » Ma, se si paragona la piramide BASCT alla piramide SABCD,
 » la base ASCT della prima può situarsi sulla base ABCD del-
 » la seconda; allora, essendo il punto O un centro comune,
 » l'altezza OB della prima coinciderà con l'altezza OS della se-
 » conda, e le due piramidi si confonderanno in una sola,
 » dunque l'angolo solido S è uguale all'angolo solido B; dun-
 » que il solido SABCDT è un ottaedro regolare.

» *Scolio.* Se tre rette uguali AC, BD, ST sono perpendi-
 » colari fra loro, e si tagliano nel loro mezzo, le estremità
 » di queste rette saranno i vertici d'un ottaedro regolare.

Costruzione del dodecaedro.

» Sia ABCDE (Fig. 246) un pentagono regolare dato; sie-
 » ne ABP, CBP due angoli piani uguali all'angolo ABC; con
 » questi angoli piani formasi l'angolo solido B, e determinasi
 » per la proposizione XXIV del libro V l'inclinazione scam-
 » bievole di due di questi piani; inclinazione ch'io chiamo K.
 » Formansi similmente ai punti C, D, E, A, gli angoli soli-
 » di uguali all'angolo solido B, e situati nella stessa manie-
 » ra: il piano CBP sarà lo stesso che il piano BCG, poichè
 » sono inclinati l'uno e l'altro della medesima quantità K sul
 » piano ABCD. Si può dunque nel piano PBGC descrivere il
 » pentagono BCGFP uguale al pentagono ABCDE. Se si fa lo
 » stesso in ciascuno degli altri piani CDI, DEL, ec., si avrà
 » una superficie convessa PFGH ec. composta da sei penta-
 » goni regolari uguali; ed inclinati ciascuno sul suo adiacente
 » della medesima quantità K. Sia p/gh ec. una seconda super-
 » ficie uguale a PFGH ec.; dico che queste due superficie
 » possono essere riunite in tal modo da formare una sola su-
 » perficie convessa continuata. Infatti l'angolo opf , per esem-

» pio può unirsi ai due angoli OPB, BPF, per fare un angolo
 » solido P uguale all'angolo B; ed in questa riunione non
 » si cambierà nulla all'inclinazione dei piani BPE, BPO,
 » poichè quest'inclinazione è quell'appunto che bisogna per
 » la formazione dell'angolo solido. Ma, nel tempo stesso che
 » si forma l'angolo solido P, il lato *pf* si applicherà sul suo
 » uguale PF, e nel punto F si troveranno riuniti tre angoli
 » piani PFG, *pfe*, *efg*, che formeranno un angolo solido u-
 » guale a ciascuno degli angoli già formati: questa riunione
 » farassi senza cambiar nulla lo stato dell'angolo P, nè quello
 » della superficie *efgh*, ec., poichè i piani PFG, *esp*, digià
 » riuniti in P, hanno fra loro l'inclinazion convenevole K,
 » come pure i piani *efg*, *esp*. Continuando così di mano in
 » mano, si vede chiaro che le due superficie si aggiusteran-
 » no scambievolmente l'una coll'altra, per formare una sola
 » superficie continuata, e rientrante in se stessa: questa su-
 » perficie sarà quella d'un dodecaedro regolare, poichè è com-
 » posta di dodici pentagoni regolari eguali, e tutti i suoi an-
 » goli solidi sono uguali fra loro.

Costruzione dell'icosaedro.

» Sia ABC (Fig. 247) una delle sue facce, bisogna pri-
 » ma formare un angolo solido con cinque piani uguali al
 » piano ABC, ed ugualmente inclinati ciascuno sul suo adia-
 » cente. Perciò sul lato B'C' uguale a BC, facciasi il penta-
 » gono regolare B'C'H'I'D', dal centro di questo pentagono si
 » alzi sul suo piano una perpendicolare che si terminerà in
 » A' di modò che B'A' = B'C'; si tirino A'C', A'H', A'I', A'D';
 » e l'angolo solido A' formato dai cinque piani B'A'C', C'A'H',
 » ec. sarà l'angolo solido domandato. Poichè le oblique A'B',
 » A'C' ec. son uguali; una di esse A'B' è uguale al lato B'C';
 » dunque tutti i triangoli B'A'C', C'A'H', ec. sono uguali fra
 » loro, ed al triangolo dato ABC.

» È d'altronde evidente che i piani B'A'C', C'A'H', ec.
 » sono ugualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente; poi-
 » chè gli angoli solidi B', C', ec. sono uguali fra loro, a
 » cagione che i medesimi son formati con due angoli di trian-
 » golo equilatero, ed uno di pentagono regolare. Chiamiamo
 » K l'inclinazione dei due piani ove sono gli angoli uguali;
 » inclinazione che si può determinare mediante la proposizio-
 » ne XXIV del lib. V.; l'angolo K sarà nel tempo stesso
 » l'inclinazione di ciascuno dei piani che compongono l'an-
 » golo solido A' sul suo adiacente.

» Posto ciò, se si fanno ai punti A, B, C, gli angoli
 » solidi uguali ognuno all'angolo A', si avrà una superficie
 » convessa DEFG ec. composta di dieci triangoli equilateri,
 » di cui ciascuno sarà inclinato sul suo adiacente della quan-
 » tità K, e gli angoli D, E, F, ec. del suo contorno riuni-
 » ranno alternativamente tre e due angoli di triangoli equila-
 » teri, s'immagini una seconda superficie uguale alla super-
 » ficie DEFG ec.; queste due superficie potranno adattarsi
 » scambievolmente, unendo ciascuno angolo triplo dell'una
 » con un angolo duplo dell'altra, e siccome i piani di que-
 » sti angoli hanno già fra loro l'inclinazione K necessaria per
 » formare un angolo solido quintuplo uguale all'angolo A,
 » non si cambierà nulla in questa riunione allo stato di cia-
 » scuna superficie in particolare, e le due insieme formeranno
 » una sola superficie continua, composta di venti triangoli equi-
 » lateri. Questa superficie sarà quella dell'icosaedro regolare,
 » poichè d'altronde tutti gli angoli solidi sono uguali fra loro.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

» *Trovare l'inclinazione di due facce adiacenti d'un po-
 » liedro regolare.*

» Questa inclinazione deducesi immediatamente dalla co-
 » struzione già data dei cinque poliedri regolari; al che bi-
 » sogna aggiungere la proposizione XXIV del libro V, in vir-
 » tù della quale essendo dati i tre angoli piani, che formano
 » un angolo solido, si determina l'angolo che due di questi
 » piani fanno fra loro.

» *Nel tetraedro* (Fig. 243). Ciascun angolo solido è for-
 » mato da tre angoli di triangoli equilateri; bisogna dunque
 » cercare mediante il problema citato l'angolo che due di que-
 » sti piani fanno tra loro; quest'angolo sarà l'inclinazione di
 » due facce adiacenti del tetraedro.

» *Nell'essaedro* (Fig. 244). L'angolo di due facce adia-
 » centi è un angolo retto.

» *Nell'ottaedro* (Fig. 245). Formasi un angolo solido con
 » due angoli di triangoli equilateri, ed un angolo retto; l'in-
 » clinazione dei due piani, ove sono gli angoli de' triangoli,
 » sarà quella di due facce adiacenti dell'ottaedro.

» *Nel dodecaedro* (Fig. 246). Ogni angolo solido è for-
 » mato con tre angoli di pentagoni regolari; quindi l'inclina-
 » zione de' piani di due di tali angoli sarà quella di due fac-
 » ce adiacenti del dodecaedro.

» *Nell'icosaedro* (Fig. 247). Formasi un angolo solido con
 » due angoli di triangoli equilateri, ed un angolo di pentagono
 » regolare: l'inclinazione de' due piani, ove sono gli angoli
 » de' triangoli, sarà quella di due facce adiacenti dell'icosaedro.

P R O P O S I Z I O N E IV.

P R O B L E M A.

» *Essendo dato il lato d'un poliedro regolare, trovare il*
 » *raggio della sfera inscritta, e quello della sfera circoscritta*
 » *ad un tal poliedro.*

» Bisogna prima dimostrare che ogni poliedro regolare
 » può essere inscritto, e circoscritto ad una sfera.

» Sia AB (Fig. 248) il lato comune a due facce adiacen-
 » ti; sieno C ed E i centri di queste due facce, e CD, ED
 » le perpendicolari abbassate da questi centri sul lato comune
 » AB, le quali cadranno nel punto D, medio di questo lato.
 » Le due perpendicolari CD, DE fanno tra loro un angolo co-
 » gnito, ch'è uguale all'inclinazione di due facce adiacenti,
 » determinata dal precedente problema. Ora, se nel piano CDE,
 » perpendicolare ad AB, si conducano sopra CD ed ED le
 » perpendicolari indefinite CO ed EO, che s'incontrino in O,
 » dico che il punto O sarà il centro della sfera inscritta, e
 » quello altresì della sfera circoscritta, essendo OC il raggio
 » della prima ed OA quello della seconda.

» Infatti, poichè gli apotemi CD, DE sono uguali, e l'i-
 » potenusa DO comune, il triangolo rettangolo CDO, è uguale
 » al triangolo rettangolo ODE, (1), e la perpendicolare OC è
 » uguale alla perpendicolare OE. Ma essendo AB perpendicola-
 » re al piano CDE, il piano ABC è perpendicolare a CDE (2),
 » o CDE ad ABC: d'altronde CO, nel piano CDE, è perpen-
 » dicolare a CD, intersezione comune dei piani CDE, ABC:
 » dunque CO, (3) è perpendicolare al piano ABC. Per la me-
 » desima ragione EO è perpendicolare al piano ABE; dunque
 » le due perpendicolari CO, EO, condotte ai piani delle due
 » facce adiacenti da' centri di queste facce, s'incontrano in
 » un medesimo punto O e sono uguali. Supponiamo ora che
 » ABC ed ABE rappresentino due altre facce adiacenti qua-
 » lunque; l'apotema CD resterà sempre della medesima gran-
 » dezza; come pure l'angolo CDO metà di CDE; dunque il
 » triangolo rettangolo CDO, ed il suo lato CO saranno ugua-

(1) 18, 1. — (2) 17, 5. — (3) 18, 5.

Geom. Sol.

Geometria Solida

» li per rapporto a tutte le facce del poliedro; dunque se dal
» punto O come centro, e col raggio OC si descriva una sfe-
» ra, questa toccherà tutte le facce del poliedro nei loro cen-
» tri (poichè i piani ABC, ABE saranno perpendicolari al-
» l'estremità d'un raggio), e la sfera sarà inscritta nel po-
» liedro, o il poliedro circoscritto alla sfera.

» Congiungansi OA, OB: a cagione di $CA = CB$ le due
» oblique OA, OB, allontanandosi ugualmente dalla perpen-
» dicolare, saranno uguali; sarà lo stesso di due altre linee
» rette qualunque condotte dal centro O alle estremità d'un
» medesimo lato: dunque tutte queste linee sono uguali fra
» loro; dunque, se dal punto O, come centro, e col raggio
» OA si descrivà una superficie sferica, essa passerà per i
» vertici degli angoli solidi del poliedro, e la sfera sarà cir-
» coscritta al poliedro, o il poliedro inscritto nella sfera.

» Posto ciò, la soluzione del problema proposto non ha
» più difficoltà veruna, e può effettuarsi così:

» Essendo dato il lato d'una faccia del poliedro, descri-
» vasi questa faccia, e sia CD (Fig. 249) il suo apotema.
» Si cerchi pel problema precedente l'inclinazione di due fac-
» ce adiacenti del poliedro, e facciasi l'angolo CDE uguale a
» questa inclinazione. Si prenda DE uguale a CD; si condu-
» cano CO ed EO perpendicolari a CD, ed ED; queste due
» perpendicolari s'incontreranno in un punto O, e CO sarà
» il raggio della sfera inscritta nel poliedro.

» Sul prolungamento di DC prendasi CA uguale al raggio del
» cerchio circoscritto ad una faccia del poliedro; ed OA sarà
» il raggio della sfera circoscritta a questo poliedro medesimo.

» Poichè i triangoli rettangoli CDO, CAO, della figura
» 249, sono uguali ai triangoli dello stesso nome nella figura
» 248., quindi è che mentre CD e CA sono i raggi dei cer-
» chi inscritto e circoscritto ad una faccia del poliedro, OC
» ed OA sono i raggi delle sfere inscritta e circoscritta al
» medesimo poliedro.

» *Scolio.* Si possono dedurre delle precedenti proposizio-
» ni diverse conseguenze.

» 1.° Ogni poliedro regolare può esser diviso in tante pi-
» ramidi regolari, quante facce ha il poliedro: il vertice co-
» mune di queste piramidi sarà il centro del poliedro, ch'è
» nel tempo stesso quello delle sfere inscritta e circoscritta.

» 2.° La solidità d'un poliedro regolare è uguale alla sua
» superficie moltiplicata pel terzo del raggio della sfera inscritta.

» 3.° Due poliedri regolari del medesimo nome sono due
» solidi simili, e le loro dimensioni omologhe sono proporzio-

» nali; dunque i raggi delle sfere inscritte o circoscritte stanno fra loro come i lati di questi poliedri.

» 4.° Se s'inscrive un poliedro regolare in una sfera, i piani condotti dal centro per i differenti lati dividerranno la superficie della sfera in tanti poligoni sferici uguali e simili, quante sono le facce del poliedro (+).

LIBRO VIII.

I TRE CORPI ROTONDI.

DEFINIZIONI.

1. Si chiama *cilindro* (Fig. 250) il solido generato dalla rotazione d'un rettangolo ABCD, che s'immagina rivolgersi intorno al lato immobile AB.

In tal movimento i lati AD, BC restando sempre perpendicolari ad AB descrivono piani circolari uguali DHP, CGQ, che si chiamano le *basi del cilindro*, ed il lato CD ne descrive la *superficie convessa*.

La linea immobile AB si chiama l'*asse del cilindro*.

Ogni sezione KLM fatta nel cilindro perpendicolarmente all'asse è un cerchio uguale a ciascuna delle basi; poichè mentre il rettangolo ABCD gira intorno ad AB, la linea IK, perpendicolare ad AB, descrive un piano circolare uguale alla base, e questo piano non è altra cosa che la sezione fatta perpendicolarmente all'asse nel punto I.

Ogni sezione PQGH fatta per l'asse è un rettangolo doppio del rettangolo generatore ABCD.

2. Si chiama *cono* (Fig. 251) il solido generato dalla rotazione del triangolo rettangolo SAB, che s'immagina girare intorno al lato immobile SA.

In questo movimento il lato AB descrive un piano circo-

(+) Per maggior particolarità riguardo a' poliedri regolari si veggia la *Memoria sopra i cinque poliedri regolari di Tommaso Mandoj*.

lare BDCE, che si chiama *base del cono*; e l'ipotenusa SB ne descrive la *superficie convessa*.

Il punto S si chiama il *vertice del cono*, SA l'*asse* o *altezza*, ed SB il *lato* o l'*apotema*.

Ogni sezione HKFI fatta perpendicolarmente all'asse è un cerchio; ogni sezione SDE fatta per l'asse è un triangolo isoscele, doppio del triangolo generale SAB.

III. Se dal cono SCDB si toglie, mediante una sezione parallela alla base, il cono SFKH, il solido restante CBHF si chiama *cono troncato* ovvero *tronco di cono*.

Si può supporre che desso sia descritto dalla rotazione del trapezio ABIG, i cui angoli A e G sono retti, intorno al lato AG. La linea immobile AG si chiama l'*asse* o *altezza del tronco*, i cerchi BDC, HFK ne sono le *basi*, e BH n'è il *lato*.

IV. Due cilindri, o due coni son *simili* quando i loro assi stanno fra loro come i diametri delle loro basi.

V. Se nel cerchio ACD, (Fig. 252) che serve di base ad un cilindro, s'inscrive un poligono ABCDE, e sulla base ABCDE s'innalza un prisma retto uguale in altezza al cilindro, il prisma si dice *inscritto nel cilindro*, o il cilindro *circoscritto al prisma*.

È chiaro che gli spigoli AF, BG, CH, ec. del prisma, essendo perpendicolari al piano della base, sono compresi nella superficie convessa del cilindro; dunque il prisma, ed il cilindro si toccano secondo questi spigoli.

VI. Parimente, se ABCD (Fig. 253) è un poligono circoscritto alla base d'un cilindro, e che sulla base ABCD si costruisca un prisma retto uguale in altezza allo stesso cilindro, il prisma si chiama *circoscritto al cilindro*, o il cilindro *inscritto nel prisma*.

Sieno M, N, ec. i punti di contatto dei lati AB, BC, ec., e sieno innalzate dai punti M, N, ec. le perpendicolari MX, NY ec. al piano della base; è chiaro che queste perpendicolari saranno ad un tempo stesso nella superficie del cilindro, ed in quella del prisma circoscritto; dunque esse saranno le loro linee di contatto.

N. B. Il cilindro, il cono, e la sfera sono i *tre corpi rotondi*, di cui si tratta negli elementi.

Lemmi preliminari sulle superficie.

I.

Una superficie piana OABCD (Fig. 254) è minore di qualunque altra superficie PABCD terminata al medesimo contorno ABCD.

Questa proposizione è abbastanza evidente per essere posta nel numero degli assiomi ; poichè si potrebbe supporre che il piano è tra le superficie ciò che la linea retta è fra le altre linee : la linea retta è la più corta fra due punti dati ; parimente il piano è la superficie la più piccola fra tutte quelle che hanno uno stesso contorno. Tuttavia , siccome conviene ridurre gli assiomi al più piccolo numero possibile , ecco un ragionamento , che non lascerà verun dubbio su questa proposizione.

Una superficie essendo un' estensione in lunghezza ed in larghezza , non si può concepire che una superficie sia maggiore d' un' altra a meno che le dimensioni della prima non eccedano in qualche verso quelle della seconda ; e se accade che le dimensioni d' una superficie sieno in ogni verso minori delle dimensioni di un' altra superficie , è manifesto che la prima superficie sarà la minore delle due. Ora in qualunque verso si faccia passare il piano BPD , che taglierà la superficie piana secondo BD , e l' altra superficie secondo BPD , la linea retta BD sarà sempre minore di BPD ; dunque la superficie piana OABCD è minore della superficie circondante PABCD.

II.

Ogni superficie convessa OABCD (Fig. 255) è minore di un' altra superficie qualunque , che circondasse la prima appoggiandosi sul medesimo contorno ABCD.

Ripeteremo qui che intendiamo per *superficie convessa* una superficie che non può esser incontrata da una linea retta in più di due punti ; è per altro possibile che una linea retta si applichi esattamente in un certo senso sopra una superficie convessa ; se ne vedono degli esempi nelle superficie del cono e del cilindro. Osserveremo pure che la denominazione di superficie convessa non è ristretta alle sole superficie curve ; dessa comprende altresì le superficie *poliedre* o composte di più piani , ed anche le superficie in parte curve , in parte poliedre.

Ciò posto , se la superficie OABCD non è minore di tutte quelle che la circondano , sia tra quest' ultime PABCD la su-

perficie più piccola che sarà al più eguale ad OABCD. Per un punto qualunque O si faccia passare un piano, che tocchi la superficie OABCD senza tagliarla; questo piano incontrerà la superficie PABCD; e la parte che ne taglierà, sarà maggiore del piano stesso terminato alla medesima superficie (1); dunque, conservando il resto della superficie PABCD, si potrebbe sostituire il piano alla parte tagliata, e s'avrebbe una nuova superficie, che circonderebbe sempre la superficie OABCD, e sarebbe minore di PABCD.

Ma questa è la minore di tutte per supposizione: dunque questa supposizione non può sussistere; dunque la superficie convessa OABCD è minore d'ogni altra superficie che circondasse OABCD, e fosse terminata al medesimo contorno ABCD.

Scolio. Con un ragionamento interamente simile si proverà,

1.° Che se una superficie convessa terminata da due contorni ABC, DEF (Fig. 256) è circondata da una altra superficie qualunque terminata dai contorni medesimi, la superficie circondata sarà la più piccola delle due.

2.° Che se una superficie convessa AB (Fig. 257) è circondata da tutte le parti da un'altra superficie MN, sia che esse abbiano dei punti, delle linee, o dei piani comuni, o sia che non abbiano verun punto comune, la superficie circondata sarà sempre minore della superficie circondante.

Poichè fra queste non può esservene alcuna che sia la più piccola di tutte, atteso che in qualunque caso si potrebbe sempre condurre il piano CD tangente alla superficie convessa, il qual piano sarebbe minore della superficie CMD (2); e perciò la superficie CND sarebbe minore di MN; il che è contrario all'ipotesi che MN sia la più piccola di tutte. Dunque la superficie convessa AB è minore di tutte quelle che la circondano.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

La solidità d'un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Sia CA (Fig. 258) il raggio della base del cilindro dato, B la sua altezza; rappresentiamo con *sup.* CA la superficie del cerchio, il cui raggio è CA; dico che la solidità del cilindro sarà $\text{sup. CA} \times B$. Poichè, se $\text{sup. CA} \times B$ non è la

(1) Lem. — (2) Lem. 1.

misura del cilindro dato, questo prodotto sarà la misura di un cilindro maggiore, o minore. Ed in prima supponiamo che sia la misura d'un cilindro minore, per esempio del cilindro, di cui CD è il raggio della base, ed B l'altezza.

Circoscrivasi al cerchio, il cui raggio è CD , un poligono regolare $GHIP$, i lati del quale non incontrino la circonferenza di cui CA è il raggio (1): si supponga di poi eretto un prisma che abbia per base il poligono $GHIP$, e per altezza B , il qual prisma sarà circoscritto al cilindro, di cui CD è il raggio della base. Ciò posto, la solidità del prisma (2) è uguale alla sua base $GHIP$ moltiplicata per l'altezza B ; la base $GHIP$ è minore del cerchio di cui CA è il raggio; dunque la solidità del prisma è minore di *sup.* $CA \times B$. Ma *sup.* $CA \times B$ è, per supposizione, la solidità del cilindro inscritto nel prisma: dunque il prisma sarebbe minor del cilindro: ora, al contrario, il cilindro è minore del prisma, poichè v' è contenuto: dunque è impossibile che *sup.* $CA \times B$ sia la misura del cilindro di cui CD è il raggio della base, ed B l'altezza, ovvero, in termini più generali, *il prodotto della base d'un cilindro per la sua altezza non può misurare un cilindro minore.*

Dico in secondo luogo che questo stesso prodotto non può misurare un cilindro maggiore: poichè, per non moltiplicare le figure, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, s'è possibile, *sup.* $CD \times B$ la misura d'un cilindro maggiore, per esempio del cilindro di cui CA è il raggio della base, ed B l'altezza.

Se si fa la stessa costruzione del primo caso, il prisma circoscritto al cilindro dato avrà per misura $GHIP \times B$: l'area $GHIP$ è maggiore di *sup.* CD ; dunque la solidità del prisma di cui si tratta è maggiore di *sup.* $CD \times B$: il prisma sarebbe dunque maggior del cilindro della medesima altezza che ha per base *sup.* CA . Ora, all'opposto, il prisma è minore del cilindro, poichè v' è contenuto; dunque è impossibile che la base d'un cilindro moltiplicata per la sua altezza sia la misura d'un cilindro maggiore.

Dunque finalmente la solidità d'un cilindro è uguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario I. I cilindri della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, ed i cilindri della medesima base stanno fra loro come le altezze.

Corollario II. I cilindri simili stanno come i cubi delle

(1) 10, 4. — (2) 15, 6.

altezze, o come i cubi dei diametri delle basi. Poichè le basi stanno come i quadrati dei loro diametri, e siccome i cilindri sono simili, i diametri delle basi stanno come le altezze (1): dunque le basi stanno come i quadrati delle altezze; dunque le basi moltiplicate per le altezze, o i cilindri stessi, stanno come i cubi delle altezze.

Scolio. Sia R il raggio della base d'un cilindro, A la sua altezza, la superficie della base sarà πR^2 (2), e la solidità del cilindro sarà $\pi R^2 \times A$, ovvero $\pi R^2 A$.

PROPOSIZIONE II.

LEMMA.

La superficie convessa d'un prisma retto è uguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.

Poichè questa superficie è uguale alla somma dei rettangoli $AFCB$, $BGHC$, $CHID$ ecc. (Fig. 252), dei quali la medesima è composta; ora, le altezze AF , BG , CH , ec. di questi rettangoli sono uguali all'altezza del prisma; le loro basi AB , BC , CD , ec. prese insieme fanno il perimetro della base del prisma. Dunque la somma di questi rettangoli, o la superficie convessa del prisma è uguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.

Corollario. Se due prismi retti hanno la medesima altezza, le superficie convesse di questi prismi staranno fra loro come i perimetri delle loro basi.

PROPOSIZIONE III.

LEMMA.

La superficie convessa del cilindro è maggiore della superficie convessa d'ogni prisma inscritto, e minore della superficie convessa d'ogni prisma circoscritto.

Poichè la superficie convessa del cilindro e quella del prisma inscritto $ABCDEF$ (Fig. 252) possono essere considerate come avendo la medesima lunghezza, a cagione che ogni sezione fatta nell'uno, e nell'altro parallelamente ad AF è uguale ad AF ; e se per aver le larghezze di queste superficie si tagliano con piani paralleli alla base, o perpendicolari alla costola AF , le sezioni saranno eguali, una alla circonferenza

(1) Def. 4. — (2) 12, 5.

della base, l'altra al contorno del poligono ABCDE minore di questa circonferenza: dunque, poichè a lunghezza eguale la larghezza della superficie cilindrica è maggior di quella della superficie prismatica, ne segue che la prima superficie è maggiore della seconda.

Con un ragionamento interamente simile dimostreremo che la superficie convessa del cilindro è minore di quella d'ogni prisma circoscritto BCDKLH. (Fig. 253).

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

La superficie convessa d'un cilindro è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

Sia CA (Fig. 258) il raggio della base del cilindro dato, B la sua altezza; e si rappresenta con *circ* CA la circonferenza che ha per raggio CA, dico che *circ*.CA×B sarà la superficie convessa di questo cilindro. Poichè, se si nega questa proposizione, bisognerà che *circ*.CA×B sia la superficie di un cilindro maggiore o minore; ed in prima supponiamo che sia la superficie d'un cilindro minore, per esempio del cilindro di cui CD è il raggio della base, ed B l'altezza.

Circoscrivasi al cerchio il cui raggio è CD un poligono regolare GHIP, i cui lati non incontrino la circonferenza che ha CA per raggio; indi si supponga costruito un prisma retto che abbia per altezza B, e per base il poligono GHIP. La superficie convessa di questo prisma sarà uguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l'altezza B (1), questo contorno è minore della circonferenza il cui raggio è CA; dunque la superficie convessa del prisma è minore di *circ*.CA×B. Ma *circ*.CA×B è, per supposizione, la superficie convessa del cilindro di cui CD è il raggio della base, il qual cilindro è inscritto nel prisma; dunque la superficie convessa del prisma sarebbe minore di quella del cilindro inscritto. Ora, al contrario, dev'esser maggiore (2); dunque la supposizione ammessa è assurda; dunque 1.º *la circonferenza della base d'un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie convessa d'un cilindro minore.*

Dico in secondo luogo che questo medesimo prodotto non può misurare la superficie d'un cilindro maggiore. Poichè, per non cambiar figura, sia CD il raggio della base del cilin-

(1) 2. — (2) 3.

dro dato, e sia, s'è possibile, circ. $CD \times B$ la superficie convessa d'un cilindro che colla medesima altezza avesse per base un cerchio maggiore, per esempio il cerchio, di cui il raggio è CA. Si farà la medesima costruzione come nella prima supposizione, e la superficie convessa del prisma sarà sempre uguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l'altezza B. Ma questo contorno è maggiore di circ. CD; dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di circ. $CD \times B$, che per supposizione è la superficie del cilindro della medesima altezza di cui CA è il raggio della base. Dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di quella di questo cilindro. Ma, quand' anche il prisma fosse inscritto nel cilindro, la sua superficie sarebbe minore di quella del cilindro (1); con più ragione essa è minore quando il prisma non si estende fino al cilindro. Dunque la seconda supposizione non potrebbe aver luogo: dunque 2.° la circonferenza della base di un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie d'un cilindro maggiore.

Dunque finalmente la superficie convessa d'un cilindro è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

La solidità d'un cono è uguale al prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.

Sia SO (Fig. 259) l'altezza del cono dato, AO il raggio della base; se si rappresenta con sup. AO la superficie della base, io dico che la solidità di questo cono sarà eguale a $\text{sup. AO} \times \frac{1}{3} \text{SO}$.

Infatti supponiamo 1.° che $\text{sup. AO} \times \frac{1}{3} \text{SO}$ sia la solidità d'un cono maggiore, per esempio del cono di cui SO è sempre l'altezza, ma che abbia OB, maggiore di AO, per raggio della base.

Al cerchio di cui il raggio è AO, circoscrivasi un poligono regolare MNPT che non incontri la circonferenza il cui raggio è OB (2); indi s'intenda costrutta una piramide che abbia per base il poligono, e per vertice il punto S. La solidità di questa piramide (3) è uguale all'area del poligono MNPT moltiplicata del terzo dell'altezza SO. Ma il poligono

(1) 3. — (2) 10, 4. — (3) 10, 6.

è maggiore del cerchio inscritto rappresentato da sup. AO ; dunque la piramide è maggiore di $\text{sup. AO} \times \frac{1}{3} \text{SO}$, che per supposizione è la misura del cono di cui S è il vertice ed OB il raggio della sua base. Ora, al contrario, la piramide è minore del cono, poichè vi è contenuta, dunque 1.° è impossibile che la base d'un cono moltiplicata pel terzo della sua altezza sia la misura d'un cono maggiore.

Dico 2.° che questo medesimo prodotto non può essere la misura d'un cono minore. Poichè, per non cambiar figura, sia OB il raggio della base del cono dato, e sia, s'è possibile, $\text{sup. OB} \times \frac{1}{3} \text{SO}$ la solidità del cono che ha per altezza SO e per base il cerchio di cui AO è il raggio. Si farà la medesima costruzione che qui sopra, e la piramide SMNPT, avrà per misura l'area MNPT moltiplicata per $\frac{1}{3} \text{SO}$. Ma l'area MNPT è minore di sup. OB ; dunque la piramide avrebbe una misura minore di $\text{sup. OB} \times \frac{1}{3} \text{SO}$, e per conseguenza sarebbe minore del cono di cui AO è il raggio della base ed SO l'altezza. Ora, al contrario, la piramide è maggiore del cono, poichè il cono vi è contenuto: dunque 2.° è impossibile che la base d'un cono moltiplicata pel terzo della sua altezza sia la misura d'un cono minore.

Dunque finalmente la solidità d'un cono è uguale al prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.

Corollario. Un cono è il terzo d'un cilindro della medesima base, e della medesima altezza: da ciò segue.

1.° Che i coni di uguali altezze stanno fra loro come le basi;

2.° Che i coni di basi uguali stanno fra loro come le altezze;

3.° Che i coni simili sono come i cubi de' diametri delle loro basi, o come i cubi delle loro altezze.

Scolio. Sia R il raggio della base d'un cono, A la sua altezza; la solidità pel cono sarà $\pi R^2 \times \frac{1}{3} A$, ossia $\frac{1}{3} \pi R^2 A$.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Il cono troncato ADEB (Fig. 260) di cui OA, DP, sono i raggi delle basi, e PO l'altezza, ha per misura

$$\frac{1}{3} \pi OP. (\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP).$$

Sia TFGH una piramide triangolare della medesima altezza del cono SAB, e la cui base FGH sia equivalente alla

base del cono. Si può supporre che queste due basi sieno situate sopra un medesimo piano; allora i vertici T e S saranno a distanze uguali dal piano delle basi, ed il piano EPD prolungato farà nella piramide la sezione IKL. Ora io dico che questa sezione IKL è equivalente alla base DE; poichè le basi AB, DE stanno fra loro come i quadrati dei raggi AO, DP (1), o come i quadrati delle altezze SO, SP; i triangoli FGH, IKL stanno fra loro come i quadrati di queste medesime altezze (2); dunque i cerchi AB, DE stanno fra loro come i triangoli FGH, IKL. Ma per supposizione, il triangolo FGH è equivalente al cerchio AB; dunque il triangolo IKL è equivalente al cerchio DE.

Ora la base AB moltiplicata per $\frac{2}{3}$ SO è la misura del cono SAB, e la base FGH moltiplicata per $\frac{2}{3}$ SO è la misura della piramide TFGH; dunque, a motivo delle basi equivalenti, la solidità della piramide è equivalente a quella del cono. Per una simil ragione la piramide TIKL è equivalente al cono SDE, dunque il tronco di cono ADEB è equivalente al tronco di piramide EGHIKL. Ma la base FGH, equiva-

lente al cerchio il cui raggio è AO, ha per misura $\pi \times \overline{AO}^2$;

parimente la base IKL = $\pi \times \overline{DP}^2$; e la media proporzionale

fra $\pi \times \overline{AO}^2$, e $\pi \times \overline{DP}^2$ è $\pi \times \overline{AO} \times \overline{DP}$; dunque la solidità del tronco di piramide, o quella del tronco di cono, ha per misura

$\frac{1}{3} OP \times (\pi \times \overline{AO}^2 + \pi \times \overline{DP}^2 + \pi \times \overline{AO} \times \overline{DP})$ (5), che è lo stesso che

$$\frac{1}{3} \pi OP \times (\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + \overline{AO} \times \overline{DP}) \text{ (†)}.$$

(1) 11, 4. — (2) 16, 6. — (3) 21, 6.

(†) Da questo teorema se ne ricavano molte belle verità, delle quali eccone le principali.

TEOREMA.

Se il triangolo ABC (Fig. A tav. 8.) fa una rivoluzione intorno della retta DE esistente nel piano del triangolo, e situata comunque fuori di esso, sarà il solido che genera equivalente a tre piramidi, che hanno per basi lo stesso triangolo, e per altezze le tre circonferenze descritte da' vertici degli angoli A, B, C.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

La superficie convessa d'un cono è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

Sia AO (Fig. 259) il raggio della base del cono dato,

DIMOSTRAZIONE.

Da' punti A, B, C, si abbassino le perpendicolari BD, AF, CE, sopra la retta DE, e per i punti B e C si tirino BM, CN parallele alla retta DE. Il trapezio ABDF girando intorno a DF genera un tronco di cono a basi parallele,

che, pel teorema di sopra, avrà per espressione $\frac{1}{2} \pi DF (\overline{AF}^2 + \overline{BD}^2 + AF \times BD)$. Similmente il trapezio BDFG, girando intorno a DF genera un altro tronco che avrà per espressione

$\frac{1}{2} \pi DF (\overline{GF}^2 + \overline{BD}^2 + GF \times BD)$. Dunque il solido generato dal triangolo ABG, essendo la differenza di questi tronchi, avrà per

espressione $\frac{1}{2} \pi DF (\overline{AF}^2 - \overline{FG}^2 + AF \times BD - GF \times BD)$, ed essendo

$\overline{AF}^2 - \overline{FG}^2 = (AF + GF)AG$, ed $AF \times BD - GF \times BD = BD \times AG$, sarà perciò il solido generato dal triangolo ABF $= \frac{1}{2} \pi DF [(AF + GF)AG + BD \times AG]$, ossia $\frac{1}{2} \pi (DF \times AF \times AG + DG \times GF \times AG + DF \times BD \times AG)$. Col medesimo ragionamento si trova che il volume del solido generato dal triangolo ACG, ha per espressione $\frac{1}{2} \pi (FE \times AF \times AG + FE \times GF \times AG + FE \times CE \times AG)$, quindi addizionando queste due espressioni, si avrà l'intero volume generato dal triangolo ABC espresso da $\frac{1}{2} \pi (DF \times AF \times AG + FE \times AF \times AG + DF \times GF \times AG + FE \times GF \times AG + DF \times BD \times AG + FE \times CE \times AG)$, ossia $\frac{1}{2} \pi AG (DF \times AF + FE \times AF + DF \times GF + FE \times GF + DF \times BD + FE \times CE)$. Di più i triangoli simili BGN, CGN, ci danno BM : CN :: GM : GN : ovvero DF : FE :: GF - BD : CE - GF, dalla quale si ricava $DF \times CE - DF \times GF = FE \times GF - FE \times BD$, ossia $DF \times CE + FE \times BD = FE \times GF + DF \times GE$, e sostituendo $DF \times CE + FE \times BD$ in vece di $FE \times GF + DF \times GF$, nell'espressione trovata, si avrà $\frac{1}{2} \pi AG (DF \times AF + FE \times AF + DF \times CE + FE \times BD + DF \times GE + FE \times CE)$, ed essendo $DF \times AF + FE \times AF = DE \times AF$, $DF \times CE$

S il suo vertice, ed SA il suo lato; dico che la sua superficie sarà $\text{circ. AO} \times \frac{1}{2} \text{SA}$. Poichè sia, se è possibile, $\text{circ. AO} \times$

$+ \text{FE} \times \text{CE} = \text{DE} \times \text{CE}$, ed $\text{FE} \times \text{BD} + \text{DF} \times \text{BD} = \text{DE} \times \text{BD}$, sarà perciò il volume del solido generato dal triangolo ABC $= \frac{1}{3} \pi \text{AG}(\text{DE} \times \text{AF} + \text{DE} \times \text{CE} + \text{DE} \times \text{BD})$, ossia $\frac{1}{3} \pi \text{DE} \times \text{AG}(\text{AF} + \text{CD} + \text{BD})$. Ma i triangoli ABG ed ACG, avendo per espressione $\frac{1}{2} \text{AG} \times \text{DF}$, ed $\frac{1}{2} \text{AG} \times \text{FE}$, sarà tutto il triangolo $\text{ABC} = \frac{1}{2} \text{AG} \times \text{DF} + \frac{1}{2} \text{AG} \times \text{FE} = \frac{1}{2} \text{AG} \times \text{DE}$, e perciò sarà $\text{DE} \times \text{AG} = 2\text{ABC}$. Quindi sostituendo questo valore nell'espressione del volume, essa diventa $= \frac{1}{3} \pi 2\text{ABC}(\text{AF} + \text{CD} + \text{BD}) = \frac{2}{3} \text{ABC} \times 2\pi \text{AF} + \frac{2}{3} \text{ABC} \times 2\pi \text{CE} + \frac{2}{3} \text{ABC} \times 2\pi \text{BD}$, ossia eguale a tre piramidi che hanno per basi il triangolo ABC e per altezze $2\pi \text{AF}$, $2\pi \text{CE}$, $2\pi \text{BD}$. Ma $2\pi \text{AD}$, $2\pi \text{CE}$, $2\pi \text{BD}$, sono le circonferenze descritte da' vertici A, B, C, del triangolo ABC, dunque è vero che ec.

Corollario I. Se la retta DE (Fig. B tav. 8.), passa pel vertice dell'angolo B, in tal caso sarà $\text{BD} = 0$, e perciò l'espressione trovata si riduce ed $\frac{2}{3} \text{AB}(2\pi \text{AF} + 2\pi \text{CE})$. Ora se dal punto I, medio di AC, si abbassi IK perpendicolare sopra BE e si tirino IO, GP, parallele a BE; i triangoli AIO, ICP saranno uguali, e daranno $\text{AO} = \text{IP}$, ossia $\text{AF} - \text{IK} = \text{IK} - \text{CE}$, ovvero $\text{AF} + \text{CE} = 2\text{IK}$, e quindi $2\pi \text{AF} + 2\pi \text{CE} = 4\pi \text{IK}$. Onde sostituendo questo valore nell'espressione del volume generato dal triangolo ABC, si avrà $\frac{2}{3} \text{ABC} + 4\pi \text{IK} = \frac{2}{3} \text{ABC} \times 2\pi \text{IK}$, quindi essendo $2\pi \text{IK}$ la circonferenza che tiene per raggio IK, ne segue che il solido descritto dalla rotazione del triangolo ABC ha per misura l'aria del triangolo, moltiplicata per i due terzi della circonferenza che descrive il punto I, medio della base.

Corollario II. Se la retta DE si confonde con BC (Fig. 204) sarà $\text{BD} = 0$, e $\text{CE} = 0$, e perciò il volume del solido generato dal triangolo ABC, girando intorno al lato BC, avrà per espressione

$$\frac{1}{3} \text{ABC} \times 2\pi \text{AD} = \frac{1}{3} \times \frac{\text{BC} \times \text{AD}}{2} \times 2\pi \text{AD} = \frac{1}{3} \text{BC} \times \pi \text{AD}^2, \text{ ed es-}$$

sendo $\text{BC} \times \pi \text{AD}^2$ il volume del cilindro generato dal rettangolo ABEF, perciò il solido descritto dalla rotazione del triangolo ABC è i due terzi del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo ABEF della medesima base e della medesima altezza.

Corollario III. Dai vertici A, B, C (Fig. C tav. 8) si tirino a' punti medi de' lati opposti le rette AM, BI, CL, le quali s'intersecheranno nel medesimo punto O. Si congiunga IM,

$\frac{1}{2}$ SA la superficie d'un cono; che avesse per vertice il punto S e per base il cerchio descritto col raggio OB maggiore di AO.

Circoscrivasi al cerchio minore un poligono regolare MNPT i cui lati non incontrino la circonferenza che ha per raggio OB; e sia SMNPT la piramide regolare, che avrebbe per base il poligono e per vertice il punto S. Il triangolo SMN, uno di quelli che compongono la superficie convessa della piramide, ha per misura la sua base MN moltiplicata per la metà dell'altezza SA, che è nel tempo stesso il lato del cono dato; quest'altezza essendo uguale in tutti gli altri triangoli SNP, SPQ, ec., ne segue che la superficie convessa della piramide è uguale al contorno MNPTM moltiplicato per $\frac{1}{2}$ SA. Ma il contorno MNPTM è maggiore di *circ.*AO; dunque la superficie convessa della piramide è maggiore di *circ.*AO $\times \frac{1}{2}$ SA, e per conseguenza maggiore della superficie convessa del cono

e si abbassino da' punti O ed I le perpendicolari Ot, IK, sopra DE. Finalmente si tirino pe' punti A, I e B le rette nl e Bp parallele alla DE. Ciò fatto, essendo CM metà di BC e Cl metà di CA, sarà CM: CB :: Cl: CA, e perciò sarà IM parallela ad AB, e starà CM: CB :: IM: AB, ma CM = $\frac{1}{2}$ CB: dunque IM = $\frac{1}{2}$ AB. Di più i triangoli simili ABO, IMO, ci danno AB: IM :: IO: BO, ma AB = 2IM, dunque BO = 2IO. Ma per i triangoli simili BOp, OIn sta BO: IO :: Op: On, dunque essendo BO = 2IO, sarà pure Op = 2On, ossia Ot = BD AF + CE (cor. 1. di questo teor.), dunque sarà 3Ot = AF + CE + BD, e quindi sarà $6\pi O = 2\pi AF + 2\pi CE + 2\pi BD$. Finalmente avendo trovato che il volume del solido generato dal triangolo ABC girando intorno a DE tiene per espressione $\frac{1}{3} ABC(2\pi AF + 2\pi CE + 2\pi BD)$, Sostituendo in luogo di $2\pi AF + 2\pi CE + 2\pi BD$ il suo valore $6\pi O$; si avrà $\frac{1}{3} ABC \times 6\pi O = ABC \times 2\pi O$; ma $2\pi O$ è la circonferenza descritta dal punto O; dunque se il triangolo ABC fa una intera rotazione intorno della retta DE esistente nel piano del triangolo ABC e situata comunque fuori di esso, sarà il solido che genera equivalente al prisma triangolare, che tiene per base il triangolo ABC, e per altezza la circonferenza descritta dal punto O, comune intersezione delle rette AM, Bl, CL, tirate da vertici degli angoli A, B, C, ai punti medt de' lati opposti.

Basta avere una semplice tintura di meccanica per ravvisare essere quest' ultimo corollario un caso particolare del teorema Centrobatico del Padre Goldin.

che col medesimo vertice S avesse per base il cerchio descritto col raggio OB . Ora, al contrario, la superficie convessa del cono è maggiore di quella della piramide; perchè, se si addossi base a base, cioè, la piramide ad una piramide uguale, il cono ad un cono uguale, la superficie dei due coni circonderà da tutte le parti la superficie delle due piramidi: dunque la prima superficie sarà maggiore della seconda (1); dunque la superficie del cono è maggiore di quella della piramide, che v'è contenuta. Il contrario sarebbe una conseguenza della nostra supposizione; dunque questa supposizione non può aver luogo: dunque 1.° la circonferenza della base d'un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato non può misurare la superficie d'un cono maggiore.

Dico 2.° che lo stesso prodotto non può misurare la superficie d'un cono minore. Poichè sia BO il raggio della base del cono dato, e sia, se è possibile, $\text{circ.} BO \times \frac{1}{2} SB$ la superficie del cono di cui S è il vertice, ed AO , minore di OB , il raggio della base.

Avendo fatta la medesima costruzione di sopra, la superficie della piramide $SMNPT$ sarà sempre uguale al contorno $MNPT$ moltiplicato per $\frac{1}{2} SA$. Ora il contorno $MNPT$ è minore di $\text{circ.} BO$; SA è minore di SB ; dunque, per questa doppia ragione, la superficie convessa della piramide è minore di $\text{circ.} BO \times \frac{1}{2} SB$, che, per supposizione, è la superficie del cono di cui AO è il raggio della base; dunque la superficie della piramide sarebbe minore di quella del cono inscritto. Ora, al contrario, è maggiore; poichè addossando base con base, la piramide a una piramide uguale, il cono ad un cono uguale, la superficie delle due piramidi circonderà quelle dei due coni, e per conseguenza sarà maggiore. Dunque 2.° è impossibile che la circonferenza della base d'un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato misuri la superficie d'un cono minore.

Dunque finalmente la superficie convessa d'un cono è uguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

Scolio. Sia L il lato d'un cono, R il raggio della sua base; la circonferenza di questa base sarà $2\pi R$, e la superficie del cono avrà per misura $2\pi R \times \frac{1}{2} L$, ovvero πRL .

(1) Lem. 2.

PROPOSIZIONE VIII.

T E O R E M A.

La superficie convessa del tronco di cono ADEB (Fig. 264) è uguale al suo lato AD moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi AB, DE.

Nel piano SAB che passa per l'asse SO, conducasi perpendicolarmente ad SA la linea retta AF, uguale alla circonferenza che ha per raggio AO; congiungansi SF, e si tiri DH parallela ad AF.

A cagione dei triangoli simili SAO, SDC si avrà AO : DC :: SA : SD; ed a cagione dei triangoli simili SAF, SDH s' avrà AF : DH :: SA : SD; dunque AF : DH :: AO : DC, ovvero :: *circ.*OA : *circ.*DC (1). Ma, per costruzione, AF = *circ.*AO; dunque DH = *circ.*DC. Ciò posto, il triangolo SAF, che ha per misura $AF \times \frac{1}{2} SA$, è uguale alla superficie del cono SAB, che ha per misura *circ.*OA $\times \frac{1}{2} SA$. Per una simile ragione, il triangolo SDH è uguale alla superficie del cono SDE. Dunque la superficie del tronco ADEB è uguale a quella del trapezio ADHE. Quest' ultima ha per misura (2)

$AD \times \left(\frac{AF + DH}{2} \right)$; dunque la superficie del tronco di cono

ADEB è uguale al suo lato AD moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi.

Corollario. Pel punto I, medio di AD, conducansi IKL parallela ad AB, ed IM parallela ad AF; si dimostrerà, come qui sopra, che IM = *circ.*IK. Ma il trapezio ADHF = $AD \times IM$ = $AD \times \text{circ. IK}$. Dunque si può ancora dire che *la superficie d' un tronco di cono è uguale al suo lato moltiplicato per la circonferenza d' una sezione fatta ad ugual distanza dalle due basi.*

Scolio. Se una linea AD situata tutta intera da una medesima parte della linea OC e nello stesso piano, fa una rivoluzione intorno ad OC, la superficie descritta da AD avrà

per misura $AD \times \left(\frac{\text{circ. AO} + \text{circ. DC}}{2} \right)$, ovvero $AD \times \text{circ. IK}$,

essendo le linee AO, DC, IK delle perpendicolari abbassate dalla estremità, e dalla metà della linea AD sopra l'asse OC.

Poichè se si prolungano AD ed OC fino al loro incontro

(1) 11, 14. — (2) 7, 3.

Geom. Sol.

scambievole in S, è chiaro che la superficie descritta da AD è quella d'un cono troncato di cui AO e DC sono i raggi delle basi, avendo il cono intero per vertice il punto S. Dunque questa superficie avrà la misura summenzionata.

Questa misura avrebbe sempre luogo quand'anche il punto D cadesse in S, il che darebbe un cono intero; ed anche quando la linea AD fosse parallela all'asse, il che darebbe un cilindro. Nel primo caso DC sarebbe nullo; nel secondo DC sarebbe uguale ad AO e ad IK.

PROPOSIZIONE IX.

LEMMA.

Sieno AB, BC, CD (Fig. 262) più lati successivi d'un poligono regolare, O il suo centro, ed Ol il raggio del cerchio inscritto; se si suppone che la porzione di poligono ABCD, situata tutta intera da una medesima parte del diametro FG, faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, la superficie descritta da ABCD avrà per misura $MQ \times \text{circ. Ol}$, essendo MQ l'altezza di questa superficie, o la parte dell'asse compresa fra le perpendicolari estreme AM, DQ.

Essendo il punto l alla metà di AB, ed essendo IK una perpendicolare all'asse abbassata dal punto l, la superficie descritta da AB avrà per misura $AB \times \text{circ. IK}$ (1). Conducasi AX parallela all'asse, i triangoli ABX, OlK avranno i lati rispettivamente perpendicolari, cioè, Ol ad AB, IK ad AX, ed OK a BX; dunque questi triangoli sono simili, e danno la proporzione $AB : AX$ o $MN :: Ol : IK$, ossia $:: \text{circ. Ol} : \text{circ. IK}$; dunque $AB \times \text{circ. IK} = MN \times \text{circ. Ol}$. Dal che si vede che la superficie descritta da AB è uguale alla sua altezza MN moltiplicata per la circonferenza del cerchio inscritto. Parimente la superficie descritta da BC, $= NP \times \text{circ. Ol}$, la superficie descritta da CD, $= PQ \times \text{circ. Ol}$. Dunque la superficie descritta dalla porzione di poligono ABCD ha per misura $(MN + NP + PQ) \times \text{circ. Ol}$, ossia $MQ \times \text{circ. Ol}$: dunque essa è uguale alla sua altezza moltiplicata per la circonferenza del cerchio inscritto. (+)

(1) 8.

(+) Da questa verità se ne deduce questo bel teorema, che, per quanto mi sappia, è totalmente nuovo.

Se un poligono regolare di un numero dispari di lati fa

Corollario. Se il poligono intero è d'un numero pari di lati, e se l'asse FG passa per due vertici opposti F e G, la superficie intera descritta dalla rivoluzione del mezzo poligono FACG sarà uguale al suo asse FG moltiplicato per la circonferenza del cerchio iscritto. Quest'asse FG sarà nel tempo stesso il diametro del cerchio circoscritto.

P R O P O S I Z I O N E X.

T E O R E M A.

La superficie della sfera è uguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza d'un cerchio massimo.

Dico 1.^o che il diametro d'una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo non può misurare la superficie d'una sfera maggiore Poichè sia, se è possibile, ABX circ.AC (Fig. 263) la superficie della sfera che ha per raggio CD.

Al cerchio che ha per raggio CA, circoscrivasi un poligono regolare d'un numero pari di lati, che non incontrino la circonferenza di cui CD è il raggio; sieno M e S due vertici opposti di questo poligono; ed intorno al diametro SM si

una rivoluzione intorno ad un suo asse, sarà la superficie del solido che genera equivalente al cerchio che tiene per raggio il medesimo asse (Fig. D. tav. 8.)

Sia ABCDE un poligono regolare di un numero dispari di lati, si tiri l'asse DF, e si prolunghi in H, sino all'incontro della circonferenza. Ciò fatto, per la natura del cerchio ABCDE, circoscritto al poligono, sarà AF media proporzionale tra DF ed FH, e perciò starà $DF : AF :: AF : FH$ e quindi sarà $\frac{1}{2} DF : \frac{1}{2} AF :: \text{circ.} AF : \text{circ.} FH$, e sarà perciò $\frac{1}{2} DF \cdot \text{circ.} FH = \frac{1}{2} AF \cdot \text{circ.} AF$; ma $\frac{1}{2} AF \cdot \text{circ.} AF$ esprime l'area del cerchio generato da AF, dunque sarà *cerchio* $AF = \frac{1}{2} DF \times \text{circ.} FH$. Ciò posto essendo la superficie generata dal mezzo poligono DEAF eguale al prodotto della circonferenza in esso inscritta e di DF sarà perciò *sup.* AEDCB = $DF \cdot \text{circ.} OF$, ed addizionando queste due eguaglianze verrà, *sup.* AEDCB + *cer.* AF, ossia superficie intera ABCDE = $DF \cdot \text{circ.} OF + \frac{1}{2} DF \cdot \text{circ.} FH = \frac{1}{2} DF (2 \cdot \text{circ.} OF + \text{circ.} FH) = \frac{1}{2} DF [\text{circ.} (2OF + FH)] = \frac{1}{2} DF \cdot \text{circ.} DF$, poichè $2OF + FH = DF$; ma il prodotto $\frac{1}{2} DF \cdot \text{circ.} DF$ esprime l'area del cerchio che tiene per raggio DF, dunque la superficie del solido generato dal poligono ABFDE sarà equivalente al cerchio che tiene per raggio l'asse DF dello stesso poligono.

faccia girare il semipoligono MPS. La superficie descritta da questo poligono avrà per misura $MS \times \text{circ. AC}$ (1); ma MS è maggiore di AB; dunque la superficie descritta dal poligono è maggiore di $AB \times \text{circ. AC}$, e per conseguenza maggiore della superficie della sfera di cui il raggio è CD. Ora, al contrario, la superficie della sfera è maggiore della superficie descritta dal poligono, poichè la prima circonda la seconda da tutte le parti. Dunque 1.º il diametro d'una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo non può misurare la superficie d'una sfera maggiore.

Dico 2.º che questo stesso prodotto non può misurare la superficie d'una sfera minore. Poichè sia, se è possibile, $DE \times \text{circ. CD}$ la superficie della sfera che ha per raggio CA. Si farà la medesima costruzione come nel primo caso, e la superficie del solido generato dal poligono sarà sempre uguale ad $MS \times \text{circ. AC}$. Ma MS è minore di DE, e *circ. AC* è minore di *circ. CD*: dunque per queste due ragioni la superficie del solido descritto dal poligono sarebbe minore di $DE \times \text{circ. CD}$, e per conseguenza minore della superficie della sfera il cui raggio è AC. Ora, al contrario, la superficie descritta dal poligono è maggiore della superficie della sfera che ha per raggio AC, poichè la prima superficie circonda la seconda; dunque 2.º il diametro d'una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo non può misurare la superficie d'una sfera minore.

Dunque la superficie della sfera è uguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo.

Corollario. La superficie del cerchio massimo si misura moltiplicando la sua circonferenza per la metà del raggio, o pel quarto del diametro; dunque la superficie della sfera è quadrupla di quella d'un cerchio massimo.

Scolio. Essendo così misurata la superficie della sfera, e paragonata alle superficie piane, sarà facile di avere il valore assoluto dei fusi e triangoli sferici di cui si è determinato di sopra il rapporto coll'intera superficie della sfera.

Primieramente il fuso il cui angolo è A, sta alla superficie della sfera come l'angolo A sta a quattro angoli retti (2), ovvero come l'arco di cerchio massimo che misura l'angolo A sta alla circonferenza di questo medesimo cerchio massimo. Ma la superficie della sfera è eguale a questa circonferenza moltiplicata pel diametro; dunque la superficie del fuso è uguale all'arco che misura l'angolo di questo fuso moltiplicato pel diametro.

(1) 9. — (2) 20, 7.

In secondo luogo ogni triangolo sferico è equivalente ad un fuso il cui angolo è uguale alla metà dell'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti (1). Sieno dunque P, Q, R, gli archi di cerchio massimo, che misurano i tre angoli del triangolo; sia C la circonferenza d'un cerchio massimo, e D il suo diametro: il triangolo sferico sarà

equivalente al fuso il cui angolo ha per misura $\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2}$,

e per conseguenza la superficie sarà $D \times \left(\frac{P+Q+R-\frac{1}{2}C}{2} \right)$.

Quindi, nel caso del triangolo trirettangolo, ciascuno degli archi P, Q, R, è uguale ad $\frac{1}{4}C$, la loro somma è $\frac{3}{4}C$, l'eccesso di questa somma sopra $\frac{1}{2}C$ è $\frac{1}{4}C$, e la metà di quest'eccesso $= \frac{1}{8}C$; dunque la superficie del triangolo trirettangolo $= \frac{1}{8}C \times D$, ch'è l'ottava parte della superficie totale della sfera.

La misura dei poligoni sferici si deduce immediatamente da quella dei triangoli; d'altronde essa è interamente determinata dalla proposizione XXIV del lib. VII, poichè l'unità di misura, ch'è il triangolo trirettangolo, si è ora valutata in superficie piana.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

La superficie di una zona sferica qualunque è uguale all'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.

Sia EF (Fig. 269) un arco qualunque minore o maggiore del quarto di circonferenza, e sia abbassata FG perpendicolare sul raggio EC: dico che la zona ad una base, descritta dalla rivoluzione dell'arco EF intorno ad EC, avrà per misura $EG \times \text{circ. EC}$.

Poichè supponiamo primieramente che questa zona abbia una misura minore, e sia, s'è possibile, questa misura $= EG \times \text{circ. CA}$. Inscrivasi nell'arco EF una porzione di poligono regolare EMNOPF i cui lati non tocchino la circonferenza descritta col raggio CA, e si abbassi CI perpendicolare sopra EM: la superficie descritta dal poligono EMF, girando intorno ad EC, avrà per misura $EG \times \text{circ. CI}$ (2). Questa quantità è maggiore di $EG \times \text{circ. AC}$, che per ipotesi è la misura della zona

(1) 25, 7. — (2) 9.

descritta dall'arco EF. Dunque la superficie descritta dal poligono EMNOPF sarebbe maggiore della superficie descritta dall'arco circoscritto EF; ora al contrario, quest'ultima superficie è maggiore della prima, poichè la involupa da tutte le parti, dunque 1.º la misura di qualunque zona sferica ad una sola base non può esser minore dell'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un cerchio massimo.

Dico in secondo luogo che la misura della medesima zona non può essere maggiore dell'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un cerchio massimo. Poichè supponiamo che si tratti d'una zona descritta dall'arco AB intorno ad AC, e sia, s'è possibile, $\text{zona AB} > \text{AD} \times \text{circ.AC}$. La superficie intera della sfera, composta dalle due zone AB, BH, ha per misura $\text{AH} \times \text{circ.AC}$ (1), ovvero $\text{AD} \times \text{circ.AC} + \text{DH} \times \text{circ.AC}$, se dunque si ha $\text{zona AB} > \text{AD} \times \text{circ.AC}$, è d'uopo che si abbia $\text{zona BH} < \text{DH} \times \text{circ.AC}$; ciò ch'è contrario alla prima p. te di già dimostrata. Dunque 2.º la misura d'una zona sferica ad una sola base non può esser maggiore dell'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un cerchio massimo.

Dunque finalmente qualunque zona ad una sola base ha per misura l'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un cerchio massimo.

Consideriamo adesso una zona qualunque a due basi descritta dalla rivoluzione dell'arco FH (Fig. 220) intorno al diametro DE, e sieno abbassate le perpendicolari FO, HQ su questo diametro. La zona descritta dall'arco HF è la differenza delle due zone descritte dagli archi DH e DF, queste hanno per misura $\text{DQ} \times \text{circ.CD}$, e $\text{DO} \times \text{circ.CD}$; dunque la zona descritta da FH ha per misura $(\text{DQ} - \text{DO}) \times \text{circ.CD}$, ossia $\text{OQ} \times \text{circ.CD}$.

Dunque ogni zona sferica ad una o a due basi ha per misura l'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza d'un cerchio massimo. (a)

(1) 10.

(a) † Dunque per avere la superficie di una zona sferica è necessario conoscere la sua altezza ed il diametro della sfera a cui la zona appartiene. Ma ordinariamente in una zona sono dati i raggi delle basi e l'altezza, ed in tal caso per calcolare la superficie della zona si dovrebbe trovar prima il diametro della sfera: quindi ad oggetto di facilitare un tal

Corollario. Due zone prese in una medesima sfera o in sfere eguali, sono tra loro come le loro altezze, ed una zona qualunque sta alla superficie della sfera come l'altezza di questa zona sta al diametro.

calcolo esporremo il seguente teorema, per mezzo del quale si può trovare la superficie della zona in *funzione* de' raggi delle basi e della sua altezza.

T E O R E M A.

La superficie della zona sferica HFGI (Fig. 220) equivale a quella del cerchio che ha per raggio la media proporzionale tra HG e GI.

In fatti, essendo la superficie della zona eguale al prodotto dalla circonferenza di un cerchio massimo, moltiplicata per l'altezza OQ, ovvero GL, essendo la circonferenza del cerchio massimo rappresentata da πDE , sarà perciò la superficie della zona espressa da $\pi DE \times GL$; ma nel triangolo GHI il prodotto di $GH \times GI = DE \times GL$ (1), perciò sostituendo si avrà $\pi GH \times GI$ per la superficie della zona. In fine chiamando P la media proporzionale tra GH e GI, sarà $GH \times GI = P^2$, e quindi la superficie della zona sarà espressa da πP^2 ; ma questa è l'espressione dell'area del cerchio che ha per raggio P, dunque è vero che ecc.

Scolio. Indicando HQ con R, FO con r, e l'altezza GL con a, sarà $HL = HQ + QL = HQ + OG = R + r$, e sarà $LI = QI - QL = QI - OG = R - r$, ed essendo $HG^2 = HL^2 + GL^2$, e $GI^2 = LI^2 + GL^2$, sarà perciò $HG^2 = (R + r)^2 + a^2$, e $GI^2 = (R - r)^2 + a^2$. Moltiplicando queste due eguaglianze in corrispondenza, si avrà $HG^2 \times GI^2 = [(R + r)^2 + a^2] [(R - r)^2 + a^2]$, ed estraendo le radici quadrate, sarà $GH \times GI = \sqrt{[(R + r)^2 + a^2] [(R - r)^2 + a^2]}$. Sostituendo questo valore nell'espressione $\pi GH \times GI$, si avrà $\pi \sqrt{[(R + r)^2 + a^2] [(R - r)^2 + a^2]}$, che sarà la superficie della zona a due basi.

Se la zona è ad una base sarà $r = 0$, e la formola si riduce a $\pi \sqrt{(R^2 + a^2) (R^2 + a^2)} = \pi (R^2 + a^2)$.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se il triangolo BAC, ed il rettangolo BCEF (Fig. 264, e 265) della medesima base, e della medesima altezza girino simultaneamente intorno alla base comune BC, il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà il terzo del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo (+).

Si abbassi sull'asse la perpendicolare AD (Fig. 264): il cono descritto dal triangolo ABD è il terzo del cilindro descritto dal rettangolo AFBD (1); parimente il cono descritto dal triangolo ADC è il terzo del cilindro descritto dal rettangolo ADCE; dunque la somma dei due coni, o il solido descritto da ABC, è il terzo della somma dei due cilindri o del cilindro descritto dal rettangolo BCEF.

Se la perpendicolare AD (Fig. 265) cade al di fuori del triangolo, allora il solido descritto da ABC sarà la differenza dei coni descritti da ABD ed ACD: ma nel tempo stesso il cilindro descritto da BCEF sarà la differenza dei cilindri descritti da AFBD, AECD; dunque il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà sempre il terzo del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo della medesima base e della medesima altezza.

Scolio. Il cerchio di cui AD è il raggio ha per superficie $\pi \times \overline{AD}^2$; dunque $\pi \times \overline{AD}^2 \times BC$ è la misura del cilindro descritto da BCEF, ed $\frac{1}{3} \pi \times \overline{AD}^2 \times BC$ è quella del solido descritto dal triangolo ABC.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

Supponendo che il triangolo CAB (Fig. 266) faccia una rivoluzione intorno alla linea CD condotta ad arbitrio fuor del triangolo dal suo vertice C, trovare la misura del solido così generato.

(+) Questo teorema è il corollario II.º del teorema posto alla nota della pagina 92.

(1) 5.

Prolungasi il lato AB finchè incontri l'asse CD in D; dai punti A e B si abbassino sull'asse le perpendicolari AM, BN.

Il solido descritto dal triangolo CAD ha per misura (1)

$\frac{2}{3} \pi \times \overline{AM}^2 \times CD$; il solido descritto dal triangolo CBD ha per misura $\frac{2}{3} \pi \times \overline{BN}^2 \times CD$; dunque la differenza di questi solidi, ossia

il solido descritto da ABC avrà per misura $\frac{2}{3} \pi (\overline{AB}^2 - \overline{BN}^2) \times CD$.

Si può dare un'altra forma a quest'espressione. Dal punto I, medio di AB, conducasi IK perpendicolare a CD, e pel punto B si tiri BO parallela a CD; si avrà $\overline{AM} + \overline{BN} = 2IK$ (2), ed $\overline{AM} - \overline{BN} = \overline{AO}$; dunque $(\overline{AM} + \overline{BN}) \times (\overline{AM} - \overline{BN})$, o

$\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2 = 2IK \times \overline{AO}$ (3). La misura del solido di cui si tratta è dunque espressa ancora da $\frac{2}{3} \pi \times IK \times \overline{AO} \times CD$. Ma se si abbassa CP perpendicolare sopra AB, i triangoli ABO, DCP saranno simili, e daranno la proporzione $AO : CP :: AB : CD$, donde risulta $\overline{AO} \times CD = CP \times AB$; d'altronde $CP \times AB$ è il doppio dell'area del triangolo ABC, quindi si ha $\overline{AO} \times CD = 2ABC$; dunque il solido descritto del triangolo ABC tiene ancora per misura $\frac{2}{3} \pi \times ABC \times IK$, o, il che è lo stesso, $ABC \times \frac{2}{3} \text{circ. } IK$; (poichè *circ. IK* = $2\pi IK$). Dunque il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo ABC, ha per misura l'area di questo triangolo moltiplicata per i due terzi della circonferenza che descrive il punto I medio della sua base (+).

Corollario. Se il lato $AC = CB$ (Fig. 267), la linea CI sarà perpendicolare ad AB, l'area ABC sarà uguale ad $AB \times \frac{1}{2} CI$, e la solidità $\frac{2}{3} \pi \times ABC \times IK$ diventerà $\frac{2}{3} \pi \times AB \times IK \times CI$. Ma i triangoli ABO, CIK sono simili, e danno la proporzione $AB : BO :: CI : IK$; dunque $AB \times IK = MN \times CI$; dunque il solido descritto dal triangolo isoscele ABC avrà per misura $\frac{2}{3} \pi \times MN \times \overline{CI}^2$.

Scolio. La soluzione generale sembra supporre che la linea AB prolungata incontri l'asse; ma i risultamenti non sarebbero meno veri quando la linea AB fosse parallela all'asse.

Infatti il cilindro descritto da AMNB (Fig. 268) ha per misura $\pi \overline{AM}^2 \cdot MN$, il cono descritto da ACM = $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot CM$,

(+) Vedete il corollario 1.º del teorema posto nella nota della pagina 92.

(1) 12. — (2) 7, 3. — (3) 10, 3.

ed il cono descritto da $BCN = \frac{2}{3} \pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot CN$. Addizionando i due primi solidi, e togliendone il terzo, s'avrà pel solido descritto da ABC, $\pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot (MN + \frac{1}{3} CM - \frac{1}{3} CN)$; e poichè $CN - CM = MN$, questa espressione si riduce a $\pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot \frac{2}{3} MN$, ovvero $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CP}^2 \cdot MN$; la quale si accorda coi risultamenti di già trovati.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Sieno AB, BC, CD (Fig. 262) più lati successivi d'un poligono regolare, O il suo centro, ed Ol il raggio del cerchio iscritto, se s'immagini che il settore poligonale AOD, situato da una stessa parte del diametro FG, faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, il solido descritto avrà per misura $\frac{2}{3} \pi \times \overline{Ol}^2 \cdot MQ$, essendo MQ la porzione dell'asse terminata dalle perpendicolari estreme AM, DQ.

Infatti, poichè il poligono è regolare, tutti i triangoli AOB, BOC, ec. sono uguali ed isosceli. Ora, secondo il corollario della proposizione precedente, il solido prodotto dal triangolo isoscele AOB ha per misura $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{Ol}^2 \cdot MN$; il solido descritto dal triangolo BOC ha per misura $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{Ol}^2 \cdot NP$; ed il solido descritto dal triangolo COD ha per misura $\frac{2}{3} \pi \times \overline{Ol}^2 \cdot PQ$. Dunque la somma di questi solidi, o il solido intero descritto dal settore poligonale AOD, avrà per misura $\frac{2}{3} \pi \times \overline{Ol}^2 \cdot (MN + NP + PQ)$ ovvero $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{Ol}^2 \cdot MA$.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Ogni settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base moltiplicata pel terzo del raggio; e la sfera intera ha per misura la sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio.

Sia ABC (Fig. 269) il settore circolare che, colla sua rivoluzione intorno ad AC, descrive il settore sferico; la zona

descritta da AB essendo $AB \times \text{circ.} AC$, o $2\pi AC \times AD$ (1); dico che il settore sferico avrà per misura questa zona moltiplicata per $\frac{2}{3} AC$, o sia $\frac{2}{3} \pi \overline{AC}^2 \cdot AD$.

infatti 1.° supponiamo, s'è possibile, che questa quantità $\frac{2}{3} \pi \overline{AC}^2 \cdot AD$ sia la misura d'un settore sferico maggiore, per esempio del settore sferico descritto dal settore circolare ECF simile ad ACB.

Iscrivasi nell'arco EF la porzione di poligono regolare EMNF, i cui lati non incontrino l'arco AB; si supponga quindi che il settore poligonale ENFC giri intorno ad EC nel medesimo tempo che il settore circolare ECF. Sia CI il raggio del cerchio iscritto nel poligono, e sia abbassata FG perpendicolare sopra EC. Il solido descritto dal settore poligonale

avrà per misura $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CI}^2 \cdot EG$ (2): ora CI è maggiore di AC, per costruzione, ed EG è maggiore di AD: poichè, tirando AB, EF, i triangoli EFG, ABD, che sono simili, danno la proporzione $EG : AD :: FG : BD :: CF : CB$; dunque $EG > AD$,

Per questa doppia ragione $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CI}^2 \cdot EG$ è maggiore di $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CA}^2 \cdot AD$: la prima espressione è la misura del solido descritto dal settore poligonale, la seconda è per supposizione quella del settore sferico descritto dal settore circolare ECF: dunque il solido descritto dal settore poligonale sarebbe maggiore del settore sferico descritto dal settore circolare. Ora, al contrario, è evidente che il solido di cui si tratta è minore del settore sferico, poichè v'è contenuto: dunque la supposizione dalla quale siamo partiti non può sussistere; dunque 1.° la zona o base d'un settore sferico moltiplicata pel terzo del raggio non può misurare un settore sferico maggiore.

Dico 2.° che il medesimo prodotto non può misurare un settore sferico minore. Poichè, sia CEF il settore circolare che colla sua rivoluzione genera il settore sferico dato, e supponiamo, s'è possibile, che $\frac{2}{3} \pi \cdot \overline{CE}^2 \cdot EG$ sia la misura d'un settore sferico minore, per esempio di quello generato dal settore circolare ACB.

Restando la stessa costruzione precedente, il solido descritto dal settore poligonale avrà sempre per misura $\frac{2}{3} \pi \overline{CI}^2 \times EG$; ma CI è minore di CE; dunque il solido è minore di

$\frac{1}{3} \pi \cdot CE \cdot EG$, che, per supposizione, è la misura del settore sferico descritto dal settore circolare ACB. Dunque il solido descritto dal settore poligonale sarebbe minore del settore sferico descritto da ACB. Ora, al contrario, il solido di cui si tratta è maggiore del settore sferico, poichè questo è contenuto in quello. Dunque 2° è impossibile che la zona d' un settore sferico moltiplicata pel terzo del raggio sia la misura d' un settore sferico minore.

Dunque ogni settore sferico ha per misura la zona che gli serve di base moltiplicata pel terzo del raggio.

Un settore circolare ACB può aumentare fino a divenire uguale al semicerchio; allora il settore sferico descritto dalla sua rivoluzione è la sfera intera. Dunque *la solidità della sfera è uguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del suo raggio.*

Corollario. Stando le superficie delle sfere come i quadrati dei loro raggi, queste superficie moltiplicate pe' raggi stanno come i cubi dei raggi medesimi. Dunque *la solidità di due sfere stanno come i cubi dei loro raggi, o come i cubi dei loro diametri.*

Scolio. Sia R il raggio d' una sfera; la sua superficie sarà $4\pi R^2$, e la sua solidità $4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R$, o $\frac{4}{3} \pi R^3$. Se si chiami D il diametro, avremo $R = \frac{1}{2} D$, ed $R^3 = \frac{1}{8} D^3$; dunque la stessa solidità esprimeasi ancora con $\frac{4}{3} \pi \times \frac{1}{8} D^3$, ossia $\frac{1}{6} \pi D^3$.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

La superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto (comprendendovi le sue basi) come 2 sta a 3. Le solidità di questi due corpi stanno tra loro nel medesimo rapporto.

Sia MPNQ (Fig. 270) il cerchio massimo della sfera, ABCD il quadrato circoscritto: se si fanno girare insieme il semicerchio PMQ, ed il semiquadrato PADQ intorno al diametro PQ; il semicerchio descriverà la sfera, ed il semiquadrato descriverà il cilindro circoscritto alla stessa sfera.

L'altezza AD di questo cilindro è uguale al diametro PQ; la base del cilindro è uguale al cerchio massimo, poichè ha per diametro AB uguale a MN; dunque la superficie convessa del cilindro (1) è uguale alla circonferenza del cerchio massi-

(1) 4.

mo moltiplicata pel suo diametro. Questa misura è la medesima di quella della superficie della sfera (1); dunque ne segue che *la superficie della sfera è uguale alla superficie convessa del cilindro circoscritto.*

Ma la superficie della sfera è uguale a quattro cerchi massimi; dunque la superficie convessa del cilindro circoscritto è anch'essa uguale a quattro cerchi massimi: se vi si aggiungano le due basi, che equivalgono a due cerchi massimi, la superficie totale del cilindro circoscritto sarà uguale a sei cerchi massimi; dunque la superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto come 4 sta a 6, o come 2 sta a 3. Quest'è il primo punto che si trattava di dimostrare.

In secondo luogo, poichè la base del cilindro circoscritto è uguale ad un cerchio massimo e la sua altezza al diametro, la solidità del cilindro sarà uguale al cerchio massimo moltiplicato pel diametro (2). Ma la solidità della sfera è uguale a quattro cerchi massimi moltiplicati pel terzo del raggio (3), il che riducesi ad un cerchio massimo moltiplicato per $\frac{4}{3}$ del raggio, o per $\frac{2}{3}$ del diametro; dunque la sfera sta al cilindro circoscritto come 2 sta a 3, e per conseguenza le solidità di questi due corpi stanno fra loro come le loro superficie.

Scolio. Se s'immagini un poliedro, di cui tutte le facce tocchino la sfera, questo poliedro potrà esser considerato come composto di piramidi, che hanno tutte per vertice il centro della sfera, e le cui basi sono le differenti facce del poliedro. Ora è chiaro che tutte queste piramidi avranno per altezza comune il raggio della sfera; talmentchè ogni piramide sarà uguale alla faccia del poliedro che le serve di base, moltiplicata pel terzo del raggio: dunque il poliedro intero sarà uguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio della sfera inscritta.

Si vede da ciò che le solidità dei poliedri circoscritti a una sfera stanno fra loro come le superficie di questi medesimi poliedri. Quindi, la proprietà che abbiamo dimostrata pel cilindro circoscritto è comune ad una infinità d'altri corpi.

Si sarebbe potuto osservare ugualmente che le superficie de' poligoni circoscritti al cerchio stanno fra loro come i rispettivi loro contorni.

(1) 10. — (2) 1. — (3) 15.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Supponendo che il segmento circolare BMD (Fig. 271.) faccia una rivoluzione intorno al diametro esterno a questo segmento, trovare il valore del solido generato.

Si abbassino sull'asse le perpendicolari BE, DF; dal centro C conducasi CI perpendicolare sulla corda BD; e si tirino i raggi CB, CD.

Il solido descritto dal settore BAC = $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{CB}^2 \cdot AE$ (1);
il solido descritto dal settore DCA = $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{CB}^2 \cdot AF$; dunque la differenza di questi due solidi, o il solido descritto dal settore DCB = $\frac{2}{3}\pi \cdot \overline{CB}^2 \cdot (AF - AE) = \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{CB}^2 \cdot EF$. Ma il solido descritto dal triangolo isoscele DCB ha per misura $\frac{2}{3}\pi \times \overline{CI}^2 \cdot EF$ (2), dunque il solido descritto dal segmento BMD = $\frac{2}{3}\pi \cdot EF \cdot (\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2)$. Ora nel triangolo rettangolo CBI si ha $\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2 = \overline{BI}^2 = \frac{1}{4} \overline{BD}^2$; dunque il solido descritto dal segmento BMD avrà per misura $\frac{2}{3}\pi \cdot EF \cdot \frac{1}{4} \overline{BD}^2$, ossia $\frac{1}{2}\pi \cdot \overline{BD}^2 \cdot EF$.

Scolio. Il solido descritto dal segmento BMD sta alla sfera, che ha per diametro BD, come $\frac{1}{2}\pi \cdot \overline{BD}^2 \cdot EF$ stà a $\frac{4}{3}\pi \times \overline{BD}^3$, ovvero :: EF : BD.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Ogni segmento di sfera compreso fra due piani paralleli ha per misura la semisomma delle sue basi moltiplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera di cui questa medesima altezza è il diametro.

(1) 13. — (2) 14.

Sieno BE, DF (Fig. 271) i raggi delle basi del segmento, EF l'altezza, talmentechè il segmento sia prodotto dalla rivoluzione dello spazio circolare BMDFE intorno all'asse FE.

Il solido descritto dal segmento BMD $= \frac{2}{3} \pi \cdot \overline{BD}^2 \cdot EF$ (1);
il tronco di cono descritto dal trapezio BDFE (2) $= \frac{1}{3} \pi \cdot EF \times$

$(\overline{BE}^2 + \overline{DF}^2 + BE \cdot DF)$; dunque il segmento di sfera, ch'è la

somma di questi due solidi $= \frac{2}{3} \pi \cdot EF \cdot (2\overline{BE}^2 + 2\overline{DF}^2 + 2BE \cdot DF + \overline{BD}^2)$. Ma, tirando BO parallela ad EF, s'avrà $DO = DF$

$- BE$, $\overline{DO}^2 = \overline{DF}^2 - 2DF \cdot BE + \overline{BE}^2$ (3), e per conseguenza $\overline{BD}^2$

$= \overline{BO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DF}^2 - 2DF \cdot BE + \overline{BE}^2$. Ponendo questo valore

in vece di $\overline{BD}^2$ nell'espressione del segmento, e cancellando ciò che distruggesi, s'avrà per la solidità del segmento

$$\frac{2}{3} \pi \cdot EF \cdot (3\overline{BE}^2 + 3\overline{DF}^2 + EF^2);$$

espressione, che si decompone in due parti; l'una $\frac{2}{3} \pi \cdot EF \times$

$(3\overline{BE}^2 + 3\overline{DF}^2 \pi$, ossia $EF \cdot \left(\frac{\pi \overline{BE}^2 + \pi \overline{DF}^2}{2} \right)$ è la semisomma del-

le basi moltiplicata per l'altezza; l'altra $\frac{2}{3} \pi \cdot EF^3$ rappresenta la sfera, il cui diametro è EF (4). Dunque ogni segmento di sfera ec.

Corollario. Se una delle basi è nulla, il segmento di cui si tratta, diviene un segmento sferico ad una sola base: dunque ogni segmento sferico ad una base equivale alla metà del cilindro della medesima base e della medesima altezza, più la sfera di cui questa altezza è il diametro.

(1) 17. — (2) 6. — (3) 9, 3. — (4) 13.

Scolio generale.

Sia R il raggio della base di un cilindro, A l'altezza; la solidità del cilindro sarà $\pi R^2 \times A$, o $\pi R^2 A$.

Sia R il raggio della base d'un cono, A la sua altezza; la solidità del cono sarà $\pi R^2 \times \frac{1}{3} A$, o $\frac{1}{3} \pi R^2 A$.

Sieno B , e C i raggi delle basi d'un cono troncato, A la sua altezza; la solidità del tronco di cono sarà $\frac{1}{3} \pi A (B^2 + C^2 + BC)$.

Sia R il raggio d'una sfera; la sua solidità sarà $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Sia R il raggio d'un settore sferico, A l'altezza della zona che gli serve di base; la solidità del settore sarà $\frac{2}{3} \pi R^2 A$.

Sieno P , e Q le due basi d'un segmento sferico, A la sua altezza; la solidità di questo segmento sarà $\left(\frac{P+Q}{2} \right) \cdot A + \frac{2}{3} \pi \cdot A^3$.

Se il segmento sferico non ha che una sola base P , essendo l'altra nulla, la sua solidità sarà $\frac{2}{3} PA + \frac{2}{3} \pi A^3$.

Fine della Geometria solida.

50262317

Appendice sulla misura delle superficie convesse e su quella de' volumi si de' tronchi cilindrici a basi circolari, che dei tronchi prismatici che hanno per base i poligoni regolari (a).

TEOREMA I.

» *Se un prisma, che ha per base un poligono regolare, vien segato da un piano, sarà la somma delle porzioni degli spigoli tagliati da questo piano, eguale alla porzione dell'asse moltiplicata pel numero de' lati della base del prisma.*

» Supponiamo in primo luogo che la base del prisma sia un poligono regolare di un numero pari di lati, e sia AQ questo prisma (tav. 13 fig. B) tagliato dal piano *abcdef....*
 » Nella base ABCDE... si congiungano i vertici degli angoli opposti con le rette AD, BE, CF, ec. il cui numero sarà la metà di quello de' lati del poligono ABCDE Indi per queste rette e per l'asse si tirino altrettanti piani, e sieno *ad, be, ef*, ec. le loro comuni intersezioni col piano *abcdef....*
 » si avranno tanti trapezi *Aadd, BbeE, FfeC*, ec. quant' è la metà del numero de' lati della base. Ora in ciascuno di questi trapezi i lati paralleli sono le porzioni degli spigoli del prisma, ed i lati non paralleli vengono tutti divisi per metà in O, ed o. Quindi in ogni trapezio la somma dei lati paralleli sarà il doppio di Oo, e perciò la somma de' lati paralleli di tutti i trapezi, ossia la somma delle porzioni degli spigoli è eguale 2Oo moltiplicata pel numero de' trapezi, ovvero è uguale ad Oo moltiplicata pel doppio numero de' trapezi; ma il doppio numero de' trapezi è quanto il numero de' lati della base del prisma, dunque la somma delle porzioni degli spigoli tagliati dal piano *abcdef....* è uguale alla porzione dell'asse Oo moltiplicata pel numero de' lati della base del prisma.

» Sia in secondo luogo la base del prisma un poligono regolare di un numero dispari di lati, e per fissare le idee sia questo prisma IHGKML (tav. 13 fig. C) che abbia per

(a) Avendo stabilito in questa edizione di mettere le note dell'Autore alla fine della Trigonometria, abbiám creduto di far cosa grata a' giovani di aggiungere quest'appendice, che ci è stata somministrata dal Sig. MANDOJ. L'Editore.

» zione è uguale all'altezza del vertice dell'asse, moltiplicata
 » pel numero de' lati della base del tronco.

TEOREMA II.

» *Se un prisma retto, che ha per base un poligono regolare, vien segato da un piano, sarà la superficie laterale del tronco eguale al contorno della base moltiplicato per la porzione dell'asse che ne tronca verso la base.*

» Sia il prisma retto AQ (Fig. B) che ha per base un poligono regolare tagliato, dal piano *abcdef*, dico che la superficie laterale del tronco Ad, è eguale al contorno della base ABCDEF, moltiplicato per la porzione Oo dell'asse tagliata dal medesimo piano *abcdef*. Infatti la superficie del trapezio Aab = $\frac{1}{2}(Aa+Bb) \times AB$: quella del trapezio BbcC = $\frac{1}{2}(Bb+Cc) \times BC$ ossia $\frac{1}{2}(Bb+Cc) \times AB$, per essere BC = AB; per la stessa ragione quella del trapezio CcdD = $\frac{1}{2}(Cc+Dd) \times AB$, quella del trapezio Ddff = $\frac{1}{2}(Dd+Ff) \times AB$, quella del trapezio Eeff = $\frac{1}{2}(Ee+Ff) \times AB$, e quella del trapezio FfaA = $\frac{1}{2}(Ff+Aa) \times AB$, dunque addizionando le aie di questi sei trapezi, verrà l'aia laterale del tronco prismatico Ad eguale ad $\frac{1}{2}(Aa+Bb) \times AB + \frac{1}{2}(Bb+Cc) \times AB + \frac{1}{2}(Cc+Dd) \times AB + \frac{1}{2}(Dd+Ee) \times AB + \frac{1}{2}(Ee+Ff) \times AB + \frac{1}{2}(Ff+Aa) \times AB$, ossia eguale ad $\frac{1}{2}AB(2Aa+2Bb+2Cc+2Dd+2Ee+2Ff)$ ovvero al prodotto di AB $\times (Aa+Bb+Cc+Dd+Ee+Ff)$ ma essendo $Aa+Bb+Cc+Dd+Ee+Ff=6$. Oo sarà perciò la superficie laterale del tronco prismatico Ad, eguale ad AB. 6. Oo ossia a 6. AB. Oo; ma 6. AB è il contorno della base ABCDEF, dunque la superficie laterale del tronco Ad del prisma retto AQ è eguale al contorno della base moltiplicato per la porzione Oo dell'asse che il piano segante tronca verso la base.

TEOREMA III.

» *Se un prisma retto, che ha per base un poligono regolare, vien segato da un piano, sarà il volume del tronco eguale al prodotto della base moltiplicata per la porzione dell'asse che ne tronca verso la base.*

» Sia Ad (Fig. B) il tronco prismatico, che ha per base il poligono regolare ABCDEF: si tirino dal centro O di questo poligono al vertice de' suoi angoli le rette OA, OB, OC, OD, OE, OF: indi queste rette, e per Oo si tirino altret-

» tanti piani e sieno oa, ob, oc, od, oe, of , le comuni inter-
» sezioni di questi piani col piano secante $abcdef$.

» Verrà in questo modo a scomporsi il tronco prisma-
» tico Ad in tanti tronchi di prismi triangolari, in quanti
» triangoli si è divisa la base, ossia quanto è il numero
» de' suoi lati. Ora nel tronco di prisma triangolare $AOboa$,
» abbiamo

$$\text{Vol. } AOB \text{ } boa = \frac{1}{3} AOB(Aa+Bb+Oo).$$

» Similmente per gli altri prismi triangolari troncati, avremo

$$\text{Vol. } BOC \text{ } cob = \frac{1}{3} BOC(Bb+Cc+Oo) \text{ ossia}$$

$\text{Vol. } BOC \text{ } cob = \frac{1}{3} AOB(Bb+Cc+Oo)$ per essere $BOC =$
 AOB ; del pari

$$\text{Vol. } COD \text{ } doc = \frac{1}{3} AOB(Cc+Dd+Oo)$$

$$\text{Vol. } DOE \text{ } eod = \frac{1}{3} AOB(Dd+Ee+Oo)$$

$$\text{Vol. } EOF \text{ } foe = \frac{1}{3} AOB(Ee+Ff+Oo)$$

$$\text{Vol. } FOA \text{ } aof = \frac{1}{3} AOB(Ff+Ao+Oo).$$

» Addizionando queste sei uguaglianze, ed osservando che i
» volumi de' sei prismi troncati, formano il volume dell' in-
» tiero tronco Ad , si avrà

$$\text{Vol. } Ad = \frac{1}{3} AOB(2.AO+2Bb+2.Cc+2.Dd+Ee-2Ff+6Oo)$$

» ossia

$$\text{Vol. } Ad = \frac{1}{3} AOB(Aa+Bb+Cc+Dd+Ee+Ff+3.Oo).$$

» Ma pel teorema 1.° si ha

$$Aa+Bb+Cc+Dd+Ee+Ff=6.Oo$$

» dunque sostituendo verrà

$$\text{Vol. } Ad = \frac{1}{3} AOB(9.Oo) \text{ ossia}$$

$$\text{Vol. } Ad = 6.AOB.Oo$$

» ma $6.AOB = ABCDEF$

» dunque sarà

» $\text{Vol. } Ad = ABCDEF.Oo$, cioè a dire che il volume del
» tronco prismatico Ad è uguale al prodotto della base $ABCDEF$
» moltiplicata per la porzione dell' asse Oo .

» *Scolio.* Avendo dimostrato nel corollario del teorema 1.°
« che la somma delle perpendicolari abbassate sulla base dai
« punti a, b, c, d, f (Fig. B) è eguale alla perpendico-

» lare abbassata dal punto O, moltiplicata pel numero de' lati
 » della base ABCDEF, ne segue che se si applica la dimo-
 » strazione di questo teorema al caso di un tronco di prisma
 » obbliquangolo, si perverrà alla medesima conchiusione, cioè
 » che il volume di un tronco di prisma, che ha per base un
 » poligono regolare è eguale al prodotto della base, multipli-
 » cata per l'altezza che ha il vertice del asse del tronco dalla
 » base, ossia che il volume del tronco di prisma obliquo Ad
 » che ha per base un poligono regolare ABCDEF è uguale al
 » prodotto della base ABCDEF moltiplicata per la perpendico-
 » lare abbassata dal vertice o dell'asse Oo sulla base ABCDEF.

TEOREMA IV.

» *La superficie convessa di un tronco di un cilindro*
 » *retto, segato da un piano inclinato alla base, è eguale al*
 » *prodotto della circonferenza della base, moltiplicata per*
 » *l'asse del tronco.*

» Sia il tronco AN (Fig. D) di un cilindro retto segato
 » dal piano MN obliquo alla base, dico che la superficie con-
 » vessa di questo tronco è eguale alla circonferenza AB della
 » base, moltiplicata per l'asse Oo del tronco. Infatti se que-
 » sta superficie del tronco non è eguale ad Oo $\times$ cir. AO,
 » essa sarà eguale ad Oo, moltiplicata per una circonferenza
 » o maggiore, o minore di cir. AO. Sia in primo luogo eguale
 » ad AO $\times$ air. a'O. Si iscriva nel cerchio AB un poligono re-
 » golare; tale che i suoi lati non tocchino la circonferenza mi-
 » nore a'b', e sopra di questo poligono si erigga un tronco di
 » prisma retto, che termina al medesimo piano MN. Ciò fatto
 » essendo il contorno del poligono iscritto ACDBFE maggiore
 » di cir. a'O sarà perciò contorno ACDBFE. Oo maggiore di
 » cir. a'O. Oo, ma contorno ACDBFE. Oo esprime la su-
 » perficie laterale del tronco del prisma, e cir. a'O. Oo espri-
 » me per ipotesi la superficie convessa del tronco cilindrico AN,
 » dunque sarà la superficie laterale del tronco del prisma co-
 » strutto sopra di ACDBFE, maggiore della superficie convessa
 » del tronco AN del cilindro, il che è impossibile, per essere
 » il tronco del prisma iscritto in quello del cilindro. Dunque
 » la superficie di questo tronco cilindrico AN non può essere
 » il prodotto di Oo per una circonferenza minore di cir. AO.

» Sia in secondo luogo questa superficie convessa del tronco
 » cilindrico AN, espressa da Oo moltiplicata per una circon-
 » ferenza maggiore, e sia questa cir. aO. Si iscriva nel cerchio
 » aO. un poligono regolare acdbfe, i cui lati non tocchino il

» cerchio ACB, e su di questo poligono si erigga un tronco
 » di prisma retto, che vada a terminare al medesimo piano
 » MN. Ciò fatto essendo il contorno di $acdbfe$ minore di $cir.$
 » aO , sarà il prodotto di contorno $acdbfe$ moltiplicato per Oo
 » minore di $cir. aO$, moltiplicata per Oo ; ma prodotto di
 » contorno $acdbef$. Oo esprime la superficie laterale del tron-
 » co del prisma fatto su di $acdbfe$ e prodotto di $cir. aO$. Oo
 » esprime per ipotesi la superficie convessa del tronco cilin-
 » drico AN, dunque sarà la superficie laterale del tronco del
 » prisma minore della superficie convessa del tronco cilindri-
 » co AN, il che è impossibile. Quindi la superficie di que-
 » sto tronco cilindrico AN non può essere espressa da Oo mol-
 » tiplicato per una circonferenza maggiore di quella della sua
 » base; ma essa non può essere espressa ne anche da Oo mol-
 » tiplicata per una circonferenza minore di quella della sua
 » base; dunque la superficie del tronco AM del cilindro sarà
 » espressa da Oo , moltiplicata per la circonferenza della sua
 » base.

TEOREMA V.

» Il volume di un tronco di cilindro retto, segato da un
 » piano inclinato alla sua base, è uguale al prodotto della
 » sua base, moltiplicata per l'asse del tronco.

» Sia AN (Fig. D) il tronco di cilindro retto, segato
 » da un piano MN comunque inclinato alla base: dico che
 » il volume di questo tronco è eguale al prodotto del-
 » l'asse Oo del tronco moltiplicato per la base ACB. In-
 » fatti se il volume del tronco AN non è eguale ad $Oo \times ACB$,
 » esso sarà eguale all'asse Oo , moltiplicato per un cerchio
 » minore o maggiore di ACB. Sia in primo luogo questo vo-
 » lume eguale al prodotto di Oo moltiplicato per l'area del cer-
 » chio minore $a'c'b'$. Si descriva nel cerchio ACB un poligono
 » regolare tale che i suoi lati non incontrino la circonferenza
 » di $a'c'b'$, e su di questo poligono ACDBFE si erigga un tronco
 » di prisma retto, che vada a terminare al medesimo piano
 » MN. Ciò fatto, essendo poligono ACDBFE maggiore di $cer.$
 » $a'c'b'$, sarà il prodotto di poligono ACDBFE, moltiplicato per Oo
 » maggiore del prodotto di cerchio $a'c'b'$ moltiplicato per Oo :
 » ma il prodotto di poligono ACDBFE per Oo esprime il volume
 » del tronco del prisma, ed il prodotto di cerchio $a'c'b'$ per Oo
 » esprime, per ipotesi il volume del tronco cilindrico AN,
 » dunque sarebbe il volume del tronco prismatico che ha per

» base ACDBFE, maggiore del volume del tronco cilindrico
 » AN, il che è assurdo. Dunque il volume del tronco cilin-
 » drico AN non può essere il prodotto di Oo per un cerchio
 » minore di ACB.

» Sia in secondo luogo, s'è possibile, il volume del tron-
 » co cilindrico AN eguale ad Oo moltiplicato per l'area di un
 » cerchio maggiore di ACB, e sia questo cerchio $acdb$. Si de-
 » scriva in questo cerchio il poligono regolare $acdbfe$ tale che
 » i suoi lati non incontrino la circonferenza ACB, e su que-
 » sto poligono si erigga un tronco di prisma retto, che vada
 » a terminare al piano MN. Ciò fatto: essendo poligono $acdbfe$
 » minore di cerchio $abcd$, sarà perciò il prodotto di poligo-
 » no $acdbfe$ per Oo , minore del prodotto di cerchio $acdb$ per Oo ;
 » ma il prodotto di poligono $acdbfe$ per Oo esprime il volu-
 » me del tronco del prisma fatto su di $acdbfe$, ed il prodotto
 » di cerchio $acdb$ per Oo esprime per ipotesi il volume del
 » tronco cilindrico AN: dunque sarebbe il volume del tron-
 » co del prisma minore del volume del tronco cilindrico AN;
 » il che è impossibile. Dunque il volume del tronco cilindri-
 » co AN non può essere espresso dal prodotto di Oo per l'area
 » d'un cerchio maggiore di ACB; ma abbiamo veduto che
 » non può essere espresso ne anche dal prodotto di Oo per
 » l'area di un cerchio minore di ACB, dunque esso sarà espresso
 » dal prodotto dell'asse Oo del tronco moltiplicato per l'area
 » della base ACBD.

» *Scolio.* La medesima dimostrazione potendosi applicare
 » al caso di un tronco di cilindro obliquo, a base circolare,
 » ne segue che il volume di un tronco di cilindro obliquo
 » a base circolare è uguale al prodotto della base moltiplicata
 » per la perpendicolare abbassata dal vertice dell'asse del tron-
 » co ossia per l'altezza che ha l'estremo dell'asse del tron-
 » co rispetto alla base.

» *Avvert.* Nel caso che l'asse Oo del tronco cilindrico
 » AN non si potesse comodamente misurare, basterà di mi-
 » surare due lati opposti AM e BN di questo tronco, e pren-
 » dere la metà della loro somma. Infatti nel trapezio AMNB,
 » ha $2Oo = AM + BN$, e perciò sarà $Oo = \frac{1}{2}(AM + BN)$.

F I N E.

86W

607317



1876.

Fig. D





























